مخططات فن ومحاولة تطبيقها للبرهنة على صحة الاستدلالات في المنطق الكلاسيكي

د. عابر محمد عبد العزيز (*)

مقدمة:

حاول العديد من علماء المنطق استخدام بعض المخططات والرسوم الهندسية في محاولة منهم للتعبير عن بعض الموضوعات المنْطقيَّة، والتَّدليل على مدى صحتها، ولا يظن في ذلك أن مثل هذه الموضوعات تفتقر إلى طريقة ما للتعبير عنها ، والتدليل على مدى صحتها ، ولكنها تقبل المعالجة بأكثر من طريقة ما دامت النتائج واحدة. ولعل ذلك يمثل سمةً من سمات المنطق بشكلٍ عام ، حيث التنوع في طرق البرهنة والبحث الدءوب عن أكثر الطرق اختصارًا للوصول إلى النتائج نفسها.

ويمكن القول إن الاسم الأشهر في هذا المجال يتمثل في المنطيقي الرياضي الإنجليزي چون فن John Venn، حتى إنَّ جلَّ المخططات والرسوم الهندسيَّة الَّتي نتعامل معها في الدِّراسات المنْطقيَّة إنما تعرف باسمه "مخططات فن".

وهذا لا يعنى بطبيعة الحال أن چون فن هو صاحب الفضل الأوحد في هذا المجال ، وإنما ثمة العديد من المحاولات الَّتي سبقته في هذا المجال، والَّتي بدت في معظمها محاولات مبتورة وغير ممنهجة ، والَّتي استطاع چون فن أن يتلقفها ويطورها ويضيف إليها ؛ حتى أنَّها ارتبطت به وارتبط بها ، ناهيك عن بعض المحاولات التي منها ما هو متزامن مع محاولة چون فن، ومنها ما هو لاحق لها.

وإذا كانت هناك بعض الدراسات التي عالجت مخططات فن ومدى تطبيقها فى البرهنة على صحة أشكال القياس الأرسطي ؛ فإن الدراسة هنا موجهة لمعالجة مدى إمكانية تطبيق مخططات فن في البرهنة على مدى صحة القواعد والاستدلالات في المنطق الكلاسيكي، خاصة فيما يتعلق بحساب الفئات وحساب القضايا،.

وسوف أعالج هذا الموضوع من خلال النقاط التَّاليَة:

- التَّعرف إلى طريقة التعبير بالأشكال الهندسية في المنطق.
- مخططات فن واستخدامها في الكشف عن صحة الاستدلالات في حساب الفئات.
- مخططات فن واستخدامها في الكشف عن صحة الاستدلالات في حساب القضايا.

وقد تطلبت معالجة الموضوع بهذا الشكل استخدام المنهج التحليلي المقارن، مع الاستعانة بالمنهج التاريخي في بعض الأحايين.

أولاً : التَّعرف إلى طريقة التعبير بالأشكال الهندسية في المنطق:

يمكن القول بشكل عام إن النزعةَ الهندسيَّةَ في المنطق تمثل إحدى الصُّور الَّتي ظهر عليها تطور المنطق فيما بين القرنين السابع عشر والثامن عشر وامتدت حتى القرن العشرين ، وكان لها

(*) مدرس المنطق وفلسفة العلوم.بقسم الفلسفة– كلية الآداب. جامعة سوهاج.

مجموعة من الرواد غالبيتهم من المناطقة والرياضيين .[١] والذين سعوا جميعًا _ بدرجات متفاوتة _ إلى محاولة التعبير عن بعض الأفكار والموضوعات المنْطقيَّة تعبيرًا هندسيًّا ، أو بشكل أكثر تفصيلًا سعوا إلى التَّعبير عن القضايا الحمليَّة، والأقيسة المنْطقيَّة القائمة عليها، وبعض قواعد المنطق وقوانينه ، عن طريق استخدام بعض الأشكال والرموز الهندسيَّة الَّتي تحكمها قواعد وأسس محددة.

وإذا كان هناك من يرى أن التعبير بالأشكال الهندسيَّة هو طريقة حديثة يمكن أن تضاف إلى الطرق التقليدية للتحقق من صحة الأقيسة المنْطقيَّة ، وهى بشكل أو بآخر تعبر عن وجهة نظر المناطقة المحدثين في الاستدلال القياسي، والضروب المنتجة وغير المنتجة فيه، بالشَّكل الذي يمكن القول من خلاله أن هذه الطريقة بمثابة تقييم لوجهة النظر التقليدية في القياس.[٢] أو كما يشير كيلي Kelley إلى أنَّها طريقة أخرى لاختبار صحة الأقيسة الحملية من خلال تصويرها وعناصرها كافة بأشكال هندسيَّة محددة.[٣] فإنه يمكن القول: إن التعبير بالأشكال الهندسية – كما سنرى – ليس مقصورًا على التعبير عن القضايا الحملية ، أو اختبار مدى صحة الأقيسة المنطقية فحسب ؛ وإنما ثمة مجالات وموضوعات أخرى داخل المجال المنطقي– وهو ما سوف نعالجه من خلال هذا البحث–، بل وخارجه أيضًا(مثل الإحصاء والكمبيوتر وعلم النفس) يمكن أن تطبق عليها مثل هذه الطريقة ؛ والتي بدورها تجعل التعريف السابق للمخططات الهندسية تعريفـًا ناقصًا.

ولكن التساؤل الذي ربما يفرض نفسه هنا: لماذا سعى هذا البعض من المناطقة والرياضيين إلى محاولة تفسير المنطق، والبرهنة على مدى صحة الأقيسة والاستدلالات بهذه الطريقة، خاصة في ظل وجود طرق أخرى بديلة وناجعة؟! بمعنى آخر ما هي الخصائص أو السمات الَّتي يمكن أن تتسم بها مثل هذه الطريقة الهندسيَّة في المنطق، والَّتي تجعل البعض يلجأ إليها ويفضلها على طرق أخرى؟.

ربما تكمن الإجابة عن مثل هذا التساؤل في النقاط الآتية:

إنه يمكن النظر إلى هذه الطريقة على أنَّها سهلة الاستخدام أكثر من طريقة القواعد الأربع _ مثلاً_ لاختبار صحة الأقيسة ، لاسيما وأنه بقليل من المهارة يستطيع أيُّ شخصٍ أنْ يصمِّمَ العديدَ من الأشكال الهندسيَّة المناسبة بشكلٍ سريع وواضح.[٤] وهذا ما أشار إليه البعض حيث قيل : إن التعامل بالرسوم البيانية المنْطقيَّة يمكن أن يكون متاحًا حتى للمستخدمين غير المُدَرَّبين.[5] أو بمعنى آخر أنها تعد من أبسط وسائل التحقق من صحة الاقيسة؛ إذ أنها لا تتطلب قواعد كثيرة ولا بديهيات تقوم عليها، فضلاً عن قدرتها على إظهار صحة القياس أو خطأه بصورة لا تحتاج إلى بذل جهد كبير. [٦]

كما أنه يمكن القول : إن مثل هذه الطريقة – وفقًا لما يشير إليه چون فن _ تقدِّمُ لنا إدراكًا محسوسًا للعلاقات بين الحدود والقضايا بعضها البعض.[٧] وربما يفهم من إشارة چون فن أننا من خلال هذه الطريقة ننتقل إلى مستوى جديد في فهم القضايا وعلاقاتها بعضها البعض، وهو ما يتمثل في المستوى الإدراكي من خلال ما نراه متجسِّدًا أمامنا في صورة أشكالٍ هندسيَّة محددة.

وثمة خاصية أخرى تكمن في أن هذه الطريقة ربما تكشف لنا عن أشياءٍ جديدةٍ في الأقيسة، لم يكن بمقدورنا إدراكها في ظل استخدام اللغة اللفظية، والَّتي منها _على سبيل المثال لا الحصر_ أن هناك أضربًا صحيحة للقياس من وجهة نظر أرسطو، ولكنها تبدو غير ذلك عند اختبارها بطريقة الإشكال الهندسيَّة.[٨]

وهناك _أيضًا _خاصية أخرى ربما تكمن في أن هذه الطريقة مزدوجة، بمعنى أنَّها تجمعُ بين كونها طريقة للتعبير عن القضايا والأقيسة والقوانين المنْطقيَّة ، وكونها طريقة للبرهنة على مدى صحة الاستدلالات المنْطقيَّة.

هذا ويمكن القول: أن ثمَّة مجموعة من الأفكار والرموز الَّتي ترتبط باستخدام الأشكال الهندسية في المنطق والَّتي يمكن أن تتمثل في:

– <u>فكرة الفئة</u> : حيث يمكن القول إن الفئات – وما يمكن أن ينشأ بينها من علاقات– تمثل المادة الخام الَّتي يقوم عليها استخدام الأشكال الهندسية في المنطق، فهي في الأساس تقدم تمثيلًا أو تصويرًا لهذه الفئات في علاقاتها مع بعضها البعض؛ وعليه يمكن النظر إلى مفهوم الفئة– والفارغة بالتحديد– على أنَّها تمثل إحدى الأفكار الأساسية في استخدام الأشكال الهندسية في المنطق وأهمها. فاستخدام الأشكال الهندسية في المنطق يقوم في الأساس على فكرة الفئة الفارغة، وهى طريقة كان قد اتبعها جورج بول من قبل في تفسيره للقضايا الحملية.(٩)

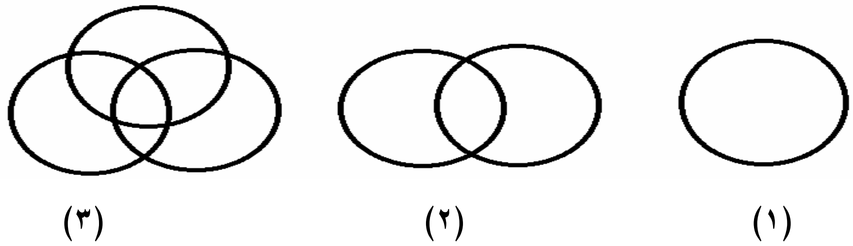
– <u>فكرة التظليل</u> : حيث يمكن النظر إلى التظليل على أنه أحد الأفكار الأساسية والمهمة والتي ترتبط باستخدام الأشكال الهندسية في المنطق ، والتظليل فيها غالباً ما يعبر عن الفراغ .وعلينا أن نلتزم بقاعدتين فيما يتعلق بالتظليل – وهو يعبر عن الفراغ كما عرفنا– ، كذلك وضعية العلامة (x) الَّتي تعبر عن عدم الفراغ ، أو أن الفئة لديها عنصر واحد على الأقل، وهاتان القاعدتان ربما يساعدان في رسم الأشكال البيانيَّة بشكل صحيح ودقيق وهما يتمثلان في الآتي:(١٠)

- التظليل يأتي دائما قبل وضع العلامة (x).
- لو أن أحد الحقلين اللذين وجب أن توضع العلامة (x) في أحدهما كان مظللاً ، فالعلامة (x) توضع مباشرة في الحقل الآخر غير المظلل ، أما إذا كان كلا الحقلين غير مظللين؛ فيجب أن توضع العلامة (x) على الخط الفاصل بينهما .

ويأتي التظليل أولاً لتحديد أىٍّ من الحقول تكون خاليةً ، وبالتالي لا يمكن للعلامة (x) أن تتواجد بهذا الحقل . كما أن وضع العلامة (x) على الخط الفاصل بين حقلين يعنى أننا نعرف فقط أنَّها يمكن أن توجد في أحد الحقلين، ولكننا لا نعرف على وجه التحديد أيًّا منهما بالضبط. وهذا يعنى أنه لو كان لدينا قياسٌ كبراه جزئية وصغراه كلية ، فإننا نبدأ بتمثيل المقدمة الصغرى أولاً.

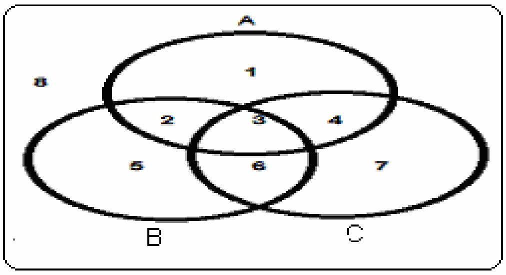
– <u>فكرة الأشكال الهندسية</u>: ويمكن النظر إلى الدوائر الهندسيَّة على أنَّها الأكثر استخدامًا وتداولاً من بين الأشكال الهندسية المستخدمة فى المنطق، وهذا بطبيعة الحال لا يمنع من أن تكون ثمة أشكال هندسيَّة أخرى يمكن استخدامها مثل: المستطيل ، والقطع الناقص، والمربع ، والمثلث، والخط... وغيرها. وهذه الأشكال إما أن تستخدم بصورة موحدة ، حيث تكون فئة الشَّكل ثابتة، وإما أن تستخدم بصورة مختلطة، حيث يتداخل شكل مع شكل آخر لأغراض منطقية محددة كما سنرى لاحقًا

والدوائر الهندسيَّة يمكن أن تعبر عن الحدود ، ويمكن أن تعبر عن القضايا، ويمكن أن تعبر أيضًا عن الأقيسة. وهى تأتى فردية ومستقلة في النمط الأول ، وثنائية ومتداخلة إلى حد ما في النمط الثاني ، وثلاثية متقاطعة في النمط الثالث. ويمكن التعبير عن ذلك من خلال الأشكال الهندسيَّة التَّاليَة:



شكل رقم (١)

وبطبيعة الحال عند تقاطع هذه الدوائر مع بعضها البعض خاصة في النمطين (٢)، (٣) ، تنتج عن هذا التقاطع مجموعة من الأجزاء ، ولكلٍّ منها رمزه ومدلوله الخاص في التعبير الهندسي للمنطق، فعلى سبيل المثال لو كان لدينا استدلالٌ يتكون من ثلاث قضايا (A , B ,C) وتمَّ التعبير عنه هندسيًّا من خلال الشَّكل التَّالي:



شكل رقم (٢)

فسوف يكون لدينا ثمانية أقسام :سبعة من تقاطع الدوائر الثلاث مع بعضها البعض ، والثامنة هي المنطقة الَّتي لا تنتمي إلى أية دائرة من تلك الدوائر الثلاث.

أو كما يشير فن بأن كلَّ دائرةٍ – وفقًا لذلك – تنقسم إلى أجزاء أربعة ، وكلُّ جزء مشترك بين دائرتين ينقسم إلى جزءين ، بالإضافة إلى ما هو خارج الدوائر الثلاث ، وعلى ذلك فهى تنتج ثمانية أجزاء مستقلة.[١١]

وعلى افتراض أن هذه الدوائر هى (A , B ,C) كما هو معبر عنه بالشَّكل رقم (٢) فإن رموز هذه الأجزاء المتقاطعة سوف يكون كالتَّالي:

1- AB́Ć   2- ABĆ   3- ABC   4- AB́C

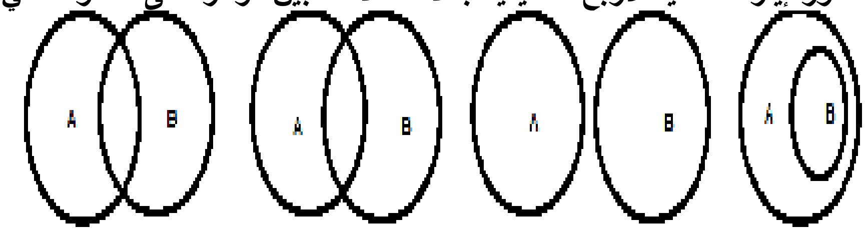
5- ÁBĆ   6- ÁB̋C   7- ÁB́C   8- ÁB́Ć

ويلاحظ – أيضًا – من خلال الشَّكل السابق أن الأجزاء السبعة الأولى يعبر كل واحد منها عن مجموعة من الأعضاء، والَّتي من الممكن أن تنتمي إلى فئة دون أن تنتمي إلى الفئتين الأخريين كما في (1)، و(5) ، و(7)، ومن الممكن أن تنتمي إلى فئتين دون الفئة الثالثة كما في (2) ، و(4)، و(6)، ومن الممكن أيضًا أن تنتمي إلى الفئات الثلاث معًا كما في (3). أما في الحالة (8) فليس هناك انتماءٌ إلى أية فئة من الفئات الثلاث.[١٢]

وهذا ما أشار إليه فن عندما ذهب إلى أن وصف أية فئة معطاة يمكن أن يتم بناءه عن طريق معنى (X)، ولا (X) – بوصفهما نمطًا من الحروف المستخدمة– بحيث إن XYZ تشير إلى ما هو (X) و(Y) و((Z ، وان XÝŹ تشير إلى ما هو (X)، ولكنه ليس Y ، ولا Z وإلى غير ذلك.[١٣]

هذا وعلى الرغم من أن الاسم "فن" هو الذي ارتبط بالأشكال الهندسيَّة المستخدمة في تفسير بعض الأفكار والموضوعات المنْطقيَّة ، إلا أن ثمة محاولات أخرى شاركت محاولة چون فن في استخدام مثل هذه الأشكال. ونذكر من بين هذه المحاولات محاولة ليبنتز، حيث يعد ليبنتز من الذين استخدموا أشكالاً هندسية متنوعة للتعبير عن القضايا والأقيسة المنطقية، وهو يستخدم الدوائر ويستخدم _أيضًا _ما يسمى بالخطوط؛ ليعبرَ يهما عن القضايا الحملية تارة، وتارة أخرى عن الأقيسة المنطقية.(١٤)

وهناك أيضًا محاولة الرياضي السويسري إيلر(١٥) ، والذي استطاع أن يصور العلاقات المنْطقيَّة بعلاقات هندسيَّة مما كان له أهمية كبرى، وبالأخص في جذب الانتباه إلى التَّفْسير الماصدقي، أو التَّفْسير بالفئات للقضايا العامة، وقد جعلت الأشكال الهندسيَّة مبادئ القياس تبدو واضحة وضوحًا حدسيًا ، وقد صور إيلر القضايا الأربع التقليدية بثلاث علاقات بين دوائر على النحو التَّالي:



ج. س　　　ج . م　　　ك . س　　　ك . م

شكل رقم (٣)

وقد تنبه إيلر –وفقا لما يشير إليه بلانشي – إلى أهمية التمثيل الهندسي للأقيسة المنْطقيَّة، عن طريق تداخل الدوائر، فمن خلال رسائله إلى أميرة ألمانيا ما بين عامي ١٧٨٧ و ١٧٨٩ م ، عرض المفاهيم الأساسية في المنطق مستندًا إلى هذا التمثيل الهندسي ، مبررًا استعماله قائلًا" : هذه الأشكال المستديرة مؤهلة كثيرًا لتسهيل تأملاتنا في هذا الموضوع، ولتيسر لنا الكشف عن كل الأسرار الَّتي يتباهون بها في المنطق ، والَّتي يبرهنون عنها بعناء كبير، بينما يقفز كل شيء أمام ناظرنا بواسطة هذه الأشكال والصور".(١٦)

ويقول النشار في ذلك: أما عن وضع القياس في دوائر فأهم من فعل هذا من وجهة نظر الماصدق هو إيلر، وقد اشتهرت دوائره في كتب المنطق بما لها من قدرة على شرح الكثير من مسائل القياس.(١٧)

وإذا كان كلٌّ من ليبنتز، وإيلر ممن حاولوا إيجاد تصوُّرٍ هندسي للاستدلالات ، حسب مختلف القضايا الأولية المعترف بها أولاً بمقتضى استعمالات اللغة ، فعلى العكس من ذلك ينطلق جيرچون بوصفه هندسيًّا من مختلف العلاقات الوضعية الممكنة بين شكلين مسطحين – دائرتان مثلاً – ليطبع عليهما شتَّى العلاقات الممكنة في قضية بسيطة بين الفكرتين الَّتي تجمعهما، الأولى بوصفها موضوع، والأخرى بوصفها محمول ؛ وهو بذلك يصل إلى توزيع للقضايا البسيطة يختلف بشكل ملموس عن التوزيع المستعمل حسب الكمية والنوعية ؛ لأنه يتضمن خمس قضايا كلها ايجابية.(١٨)، وقد عبر جيرچون بهذه الدوائر عن العلاقات الخمس والتى تمثلت فى علاقة الاستبعاد،

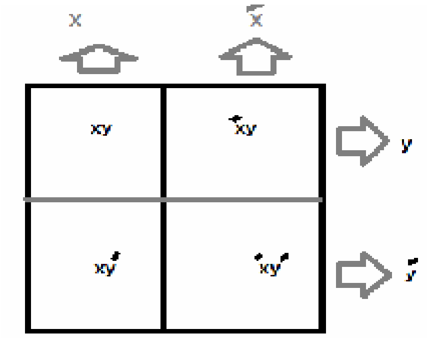
التقاطع ،التطابق وعلاقة التضمن وهى تنقسم إلى صورتين: الأولى" متضمن في" والثانية " يتضمن"[١٩].

وأعتقد أن لهذه المحاولة _ ومحاولة إيلر من قبلها في استخدام الأشكال الهندسية فى المنطق_أثرًا كبيرًا في المحاولة الأكبر والأوسع انتشارًا في هذا المجال ، والّتي قام بها المنطيقي الإنجليزي چون فن.

فهناك_ مثلاً_ من يرى أن نسق فن في الأشكال الهندسيَّة المعبرة عن النظرية المنْطقيَّة إنما هو تعديل لنسق غير مكتمل يسبقه ، وهو النسق الخاص بإيلر.[٢٠]

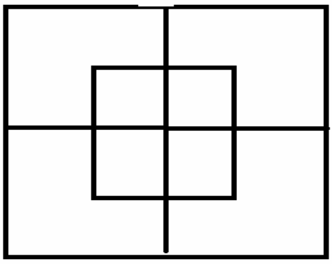
وقد تحدث چون فن ذاته في كتابه" المنطق الرمزي" عن نسق أو مخطط إيلر، ووضح كيف أنه على الرغم من كونه ملائمًا، إلا أنه لا يفي بالأغراض المنْطقيَّة المطلوبة.[٢١]

كما أن ثمة محاولة أخرى في استخدام الأشكال الهندسية وتطبيقها في الكشف عن مدى صحة الاستدلالات المنطقية ، وهذه المرة من قبل المنطيقي الإنجليزي لويس كارول ، والتي ربما تكون متزامنة أو لاحقة بقليل لمحاولة چون فن .[٢٢]وقد استخدم لويس في محاولته هذه أشكالاً تختلف عن تلك المُستخدمة من قبل إيلر وچون فن مثلاً ؛ ليعبر بها عن الحدود والقضايا والعلاقات التي يمكن أن تقوم فيما بينها، فهو يستخدم الشكل التالي مثلا ً ليعبر به عن حدين (x ,y) .



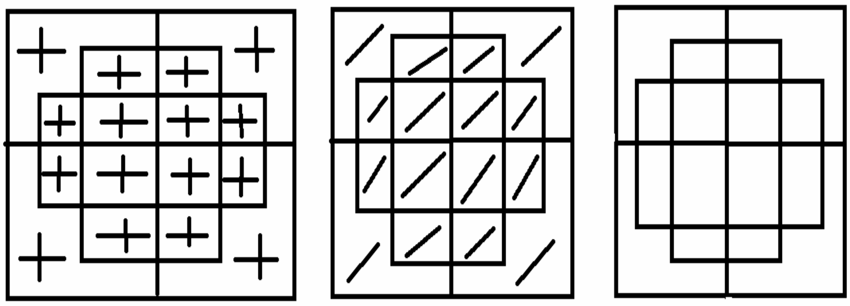
شكل رقم (٤)

أما بالنسبة لثلاثة حدود فيشير لويس إلى أن ذلك يكون من خلال رسم مربع داخلي في الشكل رقم (٤) ويشير هذا المربع إلى الحد الجديد، وليكن (m) مثلاً ، على أن يشير كل ما هو خارج هذا المربع إلي (ḿ)؛ وعليه فالشكل الجديد سوف يتضمن ثمان خلايا ، وهى كافية لاستيعاب شتى العلاقات التي يمكن أن تجمع بين الفئات الثلاث على النحو التالي:



شكل رقم (٥)

ويعرض لويس من خلال مؤلفه – المنطق الرمزي – مجموعة من الأشكال على غرار الشكلين السابقين ؛ ليعبر بها عن العلاقة بين أربع ، وخمس .....وحتى عشر فئات ، و يمكن أن نعرض بعضًا منها على النحو التالي:



شكل رقم (٦)

فالرسم الأول في الشكل السابق يعبر عن أربع فئات ، وهو ينقسم إلى ست عشرة خلية، في حين أن الرسم الثاني يعبر به لويس عن خمس فئات ، وهو بدوره ينقسم إلى اثنتين وثلاثين خلية ، أما الرسم الثالث فهو يعبر عن ست فئات ، وينقسم إلى أربع وستين خلية.

وهكذا يمضي لويس في أشكاله البيانية حتى يصل بها إلى الشكل الذي يعبر عن عشرة حـــدود ، وهو ينقسم عنده إلى ألف وأربع وعشرين خليَّةً فرعيَّةً.

ويخبرنا لويس ذاته أن طريقته في التمثيل الهندسي للمنطق تتفق وطريقة چون فن في سمات معينة ، وتختلف معها في سمات أخرى ، فهي تتشابه معها– كما سنرى– في تضمنها لحقول منفصلة تشير إلى الفئات المتعددة ، كذلك في وصفها لمثل هذه الحقول من حيث كونها فارغة أو بها أعضاء. وتختلف عنها من حيث إنها تخصِّصُ أو تحدِّدُ منطقة مغلقة لمقولة الكل– وهو ما لم يفعله چون فن – بالإضافة إلى أنها تستخدم أشكالاً مستقيمةً بدلاً من الأشكال غير المستقيمة عند چون فن ، وأخيرًا تختلف طريقة لويس عن طريقة چون فن من حيث إن الأولى تشير إلى الفراغ، ووجود أعضاء داخل فئة ما برموز تختلف عن رموز چون فن . ومثل هذا التشابه والاختلاف سوف يظهر جليًّا بعد عرضنا طريقة چون فن بالتفصيل.

هذا وعلى الرغم من ذلك، فيبدو أن التعبير عن الأفكار المنْطقيَّة، والبرهنة على مدى صحة الأقيسة والقوانين المنْطقيَّة اتخذ شكلًا جديدًا وواضحًا ، على أيدي المنطيقي الإنجليزي چون فن ، والَّذي يبدو _أيضًا _أنه استفاد بدرجة كبيرة من المحاولات الَّتي سبقته وخاصة محاولة إيلر.

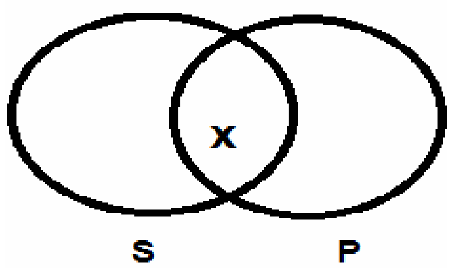
ويبدو أيضًا أن چون فن في كتابه المنطق الرمزي يستنكر عدم لجوء الأبحاث المنْطقيَّة الحديثة إلى استخدام الأشكال الهندسيَّة ، حيث يشير إلى أن الأغلبية من الأطروحات المنْطقيَّة الحديثة لم تلجأ بشكل مناسب إلى معاونة أو مساعدة الأشكال الهندسيَّة ، على الرغم من أنَّها تقدم لنا إدراكًا محسوسًا للعلاقات بين الحدود والقضايا بعضها البعض.[٢٣]

وقد اهتم چون فن _ وهو في طريقه إلى تطوير طريقة التعبير بالأشكال الهندسيَّة _كثيرًا بطريقة إيلر ؛ حيث رأى أن غالبية الأبحاث المشهورة في المنطق تستخدمها من حين إلى آخر ، وهو بشكل عام يقول: إنه من بين ستين بحثًا كتبت في هذا المجال، هناك حوالي أربعة وثلاثون منها طلبت مساعدة الرسوم البيانية، وتقريبًا كلها استخدمت مخطط إيلر.[٢٤]

هذا وإذا كانت الفكرة الأساسية في استخدام الأشكال الهندسية _ كما اشرنا آنفًا_ تتمثل في مفهوم الفئات، والتعبير عنها وشتى العلاقات الَّتي يمكن أن تقوم بينها ، وعليه فليس من المستغرب أن تعبر أشكال فن عن القضايا والأقيسة ، وتحاول البرهنة على مدى صحتها، فالقياس في أساسه إنَّما يقوم على فكرة التضمن بين الفئات ، فأشكال فن تُستَخدم في التعبير عن بعض الأفكار المنْطقيَّة والَّتي من أهمها : القضايا والأقيسة ، وإن كان الهدف النهائي يصبُّ في مصلحة الأقيسة، إلا أن أشكال فن تعبر عن مكونات هذه الأقيسة من قضايا .

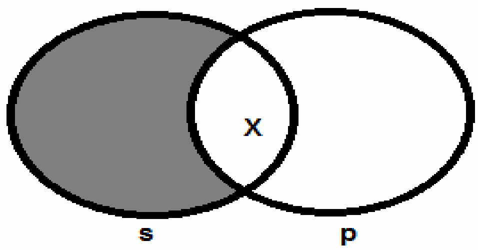
ولابد في البداية من الإشارة إلى أنه يمكن التعبير عن كل قضية من هذه القضايا من خلال دائرتين متقاطعتين، ونركز على لفظ دائرتين ؛ لأننا بصدد حدَّين لكلِّ قضية .

ويشير كيلي في ذلك إلى أننا ونحن بصدد استخدام طريقة مخططات فن في اختبار مدى صحة الأقيسة الحملية فنحن في حاجة في البداية إلى تمثيل ، أو تصوير كل واحدة من الصور المختلفة للقضايا (المشكلة للقياس). والتى يمكن أن تتمثل فى الآتى:



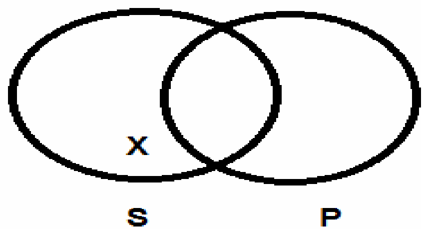
((Iبعض (s) هو (p)

شكل رقم (٧)



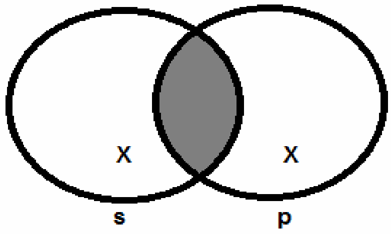
(A) كل (s) هو (p)

شكل رقم (٨)



(O) بعض (s) ليس (p)

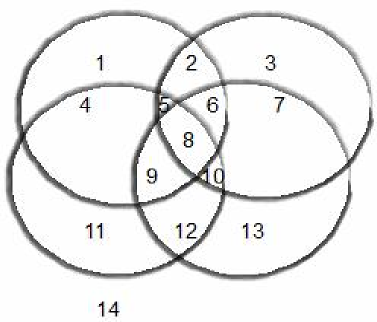
شكل رقم (9)



(E) لا واحد من (s) هو (p)
لا واحد من (p) هو (s)
شكل رقم (10)

وعليه _ ومن خلال تمثيل هذه القضايا _ فنحن لدينا الآن طريقة فى استخدام الأشكال الهندسية للتعبير عن أية قضيَّة في القياس بغض النظر عن الصورة الَّتي تكون عليها.(٢٥) وهكذا فدوائر چون فن كافية للتعبير عن علاقة تربط بين فئتين ، أو ثلاث فئات على الأكثر كما وضحنا ذلك آنفًا ، ولكن نظرًا لأن العلاقات بين الفئات يمكن أن تمتد لتشمل علاقات بين أربع ، أو خمس، أو ست، أو حتى عشر فئات ؛ كان من الضروري البحث عن أشكال بيانية أخرى – خلاف الدوائر – للتعبير عن مثل هذه العلاقات بين الفئات.

وإذا كان مخططُ فن الشهير ذو الثلاث دوائر يمكن استخدامه لتقديم حلول رسومية لموضوعات منطقية متضمنة ثلاث فئات (A1, A2, A3) إلا أنَّ فن ذاته قد لاحظ أن الأربع دوائر لا يمكن أن تستخدم بشكل مشابه للموضوعات المتضمنة أربع فئات مثلاً، لذلك سمح فن بكثير من الأشكال المتنوعة مثل القطع الناقص Ellipsis للتعبير عن هذه النوعية من العلاقات بين الفئات.(٢٦) وفن ذاته يقول بالنسبة لأربعة دوائر فلا يمكن رسمها بحيث تقطع واحدتها الأخريات بالطريقة المطلوبة.(٢٧) ودعنا نفترض أننا بإمكاننا التعبير عن أربعة فئات من خلال استخدام الدوائر فسوف يكون لدينا الشَّكل التالي:



شكل رقم (11)

وهو شكل لافني– إن جاز لنا هذا التعبير– ؛ وذلك لأنه لم يحصر جميع العلاقات الممكنة بين أربعة فئات ، والَّتي تتمثل في ست عشرة علاقة، وليس أربع عشرة علاقة كما هو موضح بالشَّكل بأعلى . (٢٨)

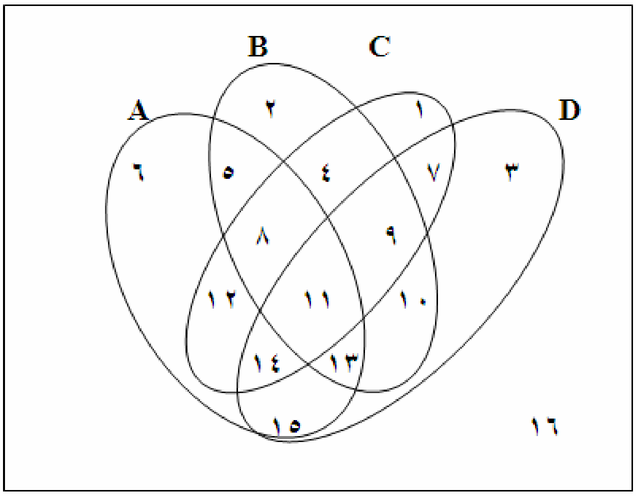
وحول عدد الأقسام الفرعية الناتجة من تداخل الأشكال الفنية بعضها البعض ، يشير فن إلى أننا نستخدم الصيغة (٢ ~) حيث تشير(~) إلى عدد الفئات الممثلة. فإن كان لدينا مثلاً ثلاث فئات متداخلة

فسوف يكون لدينا $٢^{٣}$ والتي تساوى ثمانية حقول فرعية، وإن كان لدينا أربع فئات فسوف يكون لدينا $٢^{٤}$ = ١٦ حقل، وان كان لدينا خمس فئات يكون لدينا $٢^{٥}$ = ٣٢ حقل وهكذا... حيث يتضاعف عدد الأقسام الفرعية كلما زادت فئة في التداخل.[٢٩]، ولكن إذا كانت (~) تشير إلى عدد الفئات فإلى ماذا يشير العدد(٢) ؟[٣٠]

على الرغم من أن فن على وجه التقريب لم يشر صراحة إلى مكنون العدد(٢) إلا أنه_من خلال مضمون النظرية _يمكن القول: أنه ربما يشير إلى كون الفئة فارغة أو بها حدود، وهذا ما تؤكد علية إشارته في موضع آخر، حيث يشير إلى أنه مع حدين x , y يكون لدينا أربعة أقسام xy, xý, x́y , x́ý فإذا ما أدخلنا عليها حد ثالث (z) فنحن نضيف إلى الأقسام الأربعة مرة (z) ومرة أخرى لا z (ź)[٣١] .

وعلى ذلك فنحن لا نلجأ إلى فكرة الدوائر عندما يكون عدد الفئات أكثر من ثلاث فئات؛ وعليه فالأمر- كما يشير بلانشي- يكون ممكنًا في حالات بالغة البساطة ، كتلك الَّتي تمثلها شتى جهات القياس، ولكن أمام معطيات أكثر تعقيدًا أو أمام تراكيب من أربعة، أو خمسة أطراف فلا ننجح في ذلك ؛ لأننا وقتها لا نكون قادرين على أن نعرف للوهلة الأولى إن كانت هناك تراكيب مسموح بها، ونكون في حالة لا تسمح لنا بوضع الرسم.[٣٢]

ولتمثيل أربع فئات بشكل صحيح نستخدم القطع الناقص ، والذي ينتج من خلاله ستة عشر حقلاً مستقلاً ،تمثل في مجموعها العلاقات الكائنة بين الفئات الأربع مع بعضها البعض، وهو ما يمكن أن يظهر في الشَّكل التَّالى:[٣٣]



شكل رقم (١٢)

ومن خلال الشَّكل السابق يمكن حصر هذه الحقول والعلاقات في الآتي:

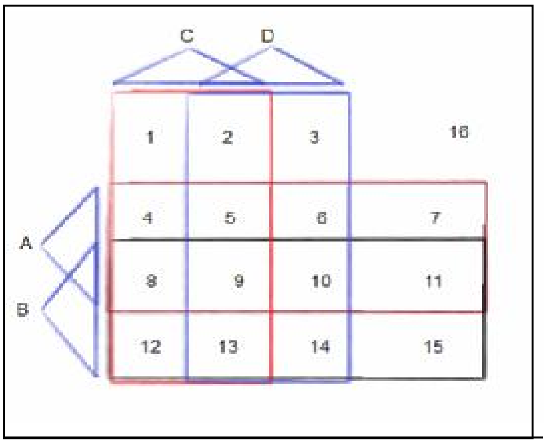
1-ÁB́CD́ 5-ABĆD́ 9-ÁBCD 13-ABĆD

2-ÁBĆD́ 6-AB́ĆD́ 10-ÁBĆD 14-AB́CD

3-ÁB́ĆD 7-ÁB́CD 11-ABCD 15-AB́ĆD

4-ÁBCD́ 8- ABCD́ 12-AB́CD́ 16-ÁB́ĆD́

والحقيقة أنه ليس فقط القطع الناقص الذي يمكن من خلاله التعبير عن العلاقة بين أربع فئات، وإنَّما ثمة أشكالٌ أخرى بعضها منتظم ، وبعضها الآخر غير منتظم، فهناك مثلاً الشَّكل المستطيلي ، وهو من الأشكال المنتظمة الَّتي يمكن أن نعبر من خلاله عن العلاقة بين فئات أربع وهو ما يتمثل في الشَّكل التَّالي:



شكل رقم (13)

وبطبيعة الحال الفئة الَّتي يعبر عنها بمستطيل، يمكن بسهولة أن تجسد العلاقة بين ثلاث فئات وفئتين.

ويشير بلانشي إلى أنه قد جرى اقتراح في عصر فن لعدة ترسيمات تتخذ غالبًا الشَّكل المستطيل، وكانت من قبل الن ماركوان ١٨٨١ م، وإلكسندر ماكفرلان ١٨٨٥ م ، ولويس كارول ١٨٨٦ م.[٣٤] والأخير – وفقًا لإشارة نيل Kneal ووفقًا لما عرضنا لجانب منه بأعلى – استخدم مخططًا متشابهًا بعض الشيء مع مخطط چون فن ، وذلك في الإجراء الَّذي قدمه لتحديد أو حسم الصحة في الأقيسة.[٣٥]

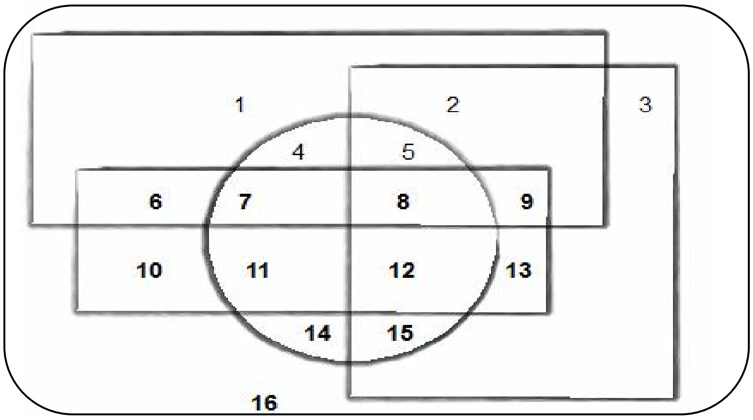
ويبدو أن استخدام المستطيل لم يكن لهذا الغرض بالتحديد (الفئات الأربع) كما ذكر صاحبه، وإلا كان الموضوع مجرد تكرار ، وإنما الهدف الأساسي من وراء استخدام المستطيل ، إنما هو استخدامه لعدد أكبر من الفئات ، بل ربما يمتد إلى (n) من الفئات ، وذلك تحاشيًا للصعوبة في اقتراح فن لشكل المشط comb لرسم مخطط خاص بخمس فئات – مثلاً– كما سنرى.[٣٦] ولكن ربما نتساءل هنا هل يمكن تطبيق أشكال القطع الناقص للتعبير عن عدد(n) من الفئات؟

حقيقة إن چون فن لم ينظر إلى مسألة وجود أشكال لعدد اعتباطي من الفئات، كما أنه في كتابه المعروف جيدًا لم يشر إلى بناء مخططات لفئات عديدة.[٣٧] ، فيشير لويس مثلاً إلى أن چون فن قدم أشكالاً لست فئات ، إلا أنه لم يذهب إلى تقديم أشكالٍ لأكثر من ذلك.[٣٨]

وهناك من يرى أنه إذا كان القطع الناقص قد أفلح في التعبير عن أربع فئات، فإن الأمر يختلف فيما هو أكثر من ذلك ، فهو لا يمكن أن يعمل بشكل قياسي[٣٩] مع ست فئات ولا حتى مع خمس فئات.[٤٠]

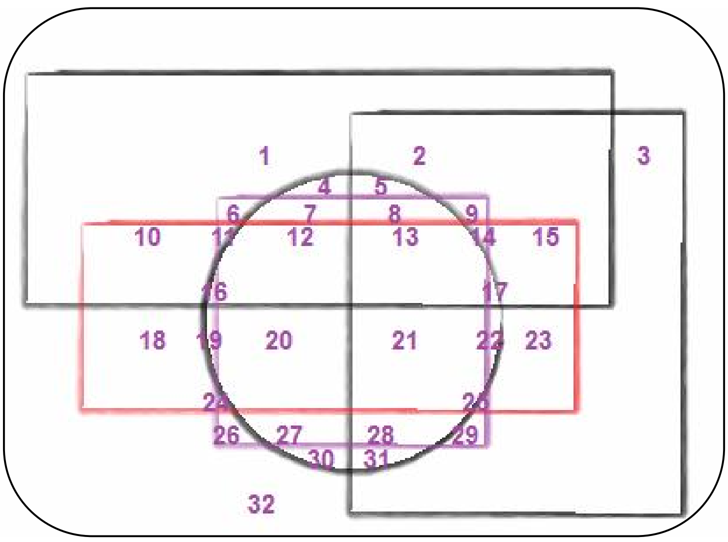
وهذا بالفعل ما أشار إليه فن عندما أشار إلى أنه مع حدود خمس مركبة، فالقطع الناقص يفشل على الأقل في شكله البسيط عن التعبير عنها.[٤١] وهو يذكر القطع الناقص هنا في شكله البسيط ، حيث إنه سوف يقدم لنا شكلاً للقطع الناقص يمثل من خلاله خمس فئات.

وعن الأشكال غير المنتظمة الّتي يمكن من خلالها التعبير عن الفئات، فهناك من يشير في محاولته لبناء مخطط يعرض لأي عدد من الفئات، فعندما نريد مثلاً التعبير عن أربع فئات نستخدم دائرة وثلاثة مستطيلات على النحو التَّالي:



شكل رقم (١٤)

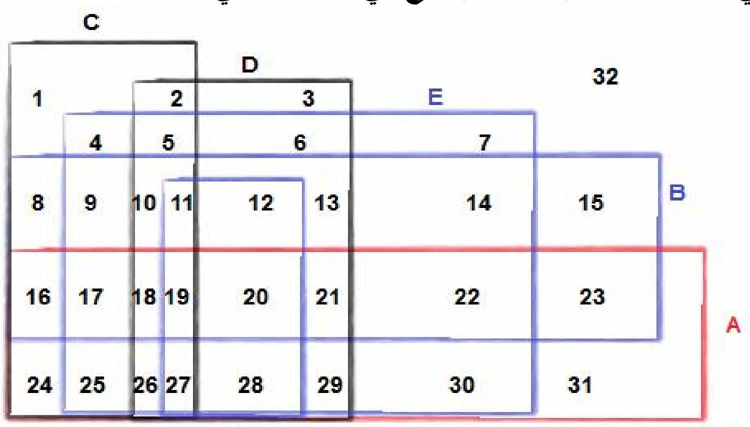
وعند التعبير عن خمس فئات باستخدام الأشكال المختلطة نستخدم الشّكل السابق مع إضافة مستطيل آخر فيكون على النحو التالي:



شكل رقم (١٥)

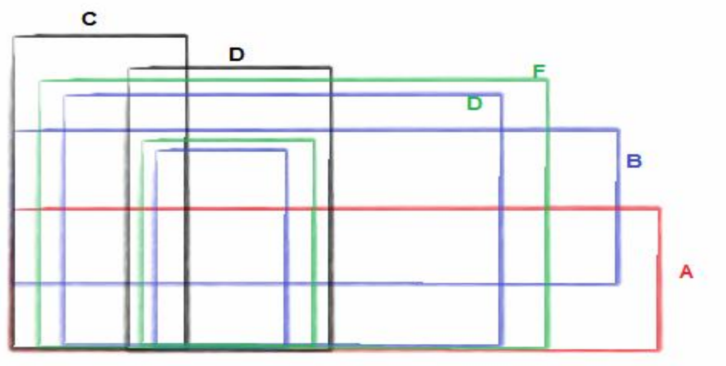
والذي ينتج عنه اثنان وثلاثون حقلاً مستقلاً كما هو موضح بالشّكل السابق، وهكذا....[٤٢]

وإذا كانت هذه الأشكال المعبرة عن العلاقة بين خمس فئات هي أشكال مختلطة وغيـــر قياســـية، فهناك _كما أشرنا_ أشكال منتظمة وقياسية ، يمكن من خلالها التعبير عن العلاقة بين خمس فئات ، كالشكّل المستطيلي مثلاً، وهو ما يمكن أن يتضح في الشكّل التَّالي:



شكل رقم (١٦)

ويقول صاحبه لتضمين فئة خامسة على الشكّل رقم (١٥) يتم ذلك عن طريق خط مزدوج على هيئة قوس، ويكون مرسوم لتقسيم كل الأجزاء الفرعية ، ونمط القوس هنا هو الفكرة الرئيسة في إضافة أو تضمين فئات إضافية، فبالنسبة لأي عدد من الفئات فوق الخمس فئات ، يرسم الخط المزدوج ليطوق الخطوط الَّتي رسمت للفئة السابقة عليها، فمثلاً بالنسبة لست فئات الخط المزدوج مرسوم كما هو مبين بالشكّل التَّالي ليطوق خطى القوس الَّذي تم رسمه في الشكّل (١٦) على النحو التَّالي:



شكل رقم (١٧)

وعند إحصاء الحقول المستقلة في الشكّل السابق (١٧) سوف نجد أنَّها تمثل أربعة وستين حقلاً. وهكذا الحال بالنسبة لسبع، أو ثماني فئات ، أو لأى عدد (n) من الفئات بحيث يكون رسم الأقواس، أو عدد الأقواس مرتبطًا بعدد الفئات من خلال الصيغة $n = 2x$ ، حيث تمثل (n) عدد الأقواس أما (x) فتمثل الصيغة $n-5$ بالنسبة إلى $n \geq 5$ وهذا يتشابه مع قانون فن العام الخاص بعدد الأسنان في تركيبته الَّتي تشبه المشط.[٤٣]

هذا ولم يقف فن عند مجرد تمثيل القضايا والأقيسة، وإنما انتقل إلى محاولة البرهنة على صحة تلك الأقيسة[٤٤]، وبشكل عام _كما يشير كيلي _ فإن تقنية أشكال فن إنما تقوم على حقيقة "أنه في القياس الصحيح النتيجة لا تؤكد أكثر مما هو متضمن بالفعل في المقدمات، وإذا كانت النتيجة تؤكد أكثر من ذلك ، فهذا يعنى أنَّها ليست مشتقة من المقدمات والقياس يكون غير صحيح"[٤٥]

وتفسير هذا المبدأ في ضوء فكرة التظليل يمكن أن يكون على النحو التالي: إن التظليل السليم لكلا المقدمتين لا يستتبع تظليل النتيجة؛ ووقتها يكون القياس صحيحًا، أما إذا تطلب الأمر تظليل أجزاء إضافية فيما يتعلق بالنتيجة؛ فوقتها يكون القياس غير صحيح.

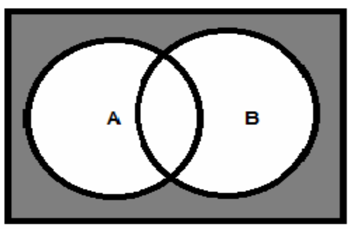
هذا ويبدو أن مخططات فن لم تستخدم للبرهنة على صحة الأقيسة المنْطقيَّة فحسب، وإنما يتم استخدامها للبرهنة على أحكام الاستدلال المباشر[٤٦]، وكذلك البرهنة على مدى صحة قوانين حساب الفئات ، وكذلك قوانين حساب القضايا ، وهو ما سوف نعرض له في الصفحات التالية.

<u>ثانيـاً: مخططات فن واستخدامها في الكشف عن صحة الاستدلالات في حساب الفئات:</u>

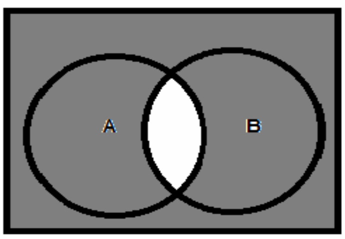
مخططات فن–كما يقول السرياقوسى – ليست مقصورة فقط على التحقق من صحة الأقيسة الحملية البسيطة أو فسادها ، ولكنها مؤهلة أيضًا للبرهنة على مدى صحة الأقيسة المركبة، كما أنه يمكن أن تستخدم للبرهنة على بعض استدلالات حساب الفئات.[٤٧]

ويقول يوري Yuri في هذا الصدد أنه قد تمَّ النظر إلى الأشكال الهندسيَّة على أنَّها أداة إضافية للمساعدة على فهم صيغ نظرية الفئات والأقيسة في النصوص المنْطقيَّة[٤٨].

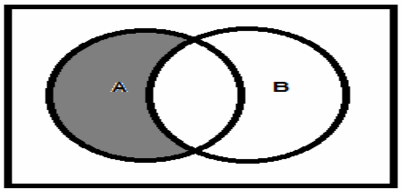
وقبل أن نتعرف إلى كيفية التدليل على مدى صحة قوانين الفئات، نحاول أن نعرض كيفية التعبير عن الفئات، وجميع العلاقات الَّتي يمكن أن تنشأ بينها من خلال أشكال فن، فأشكال فن كما يشار إليها أحيانًا أنَّها طريقة بصرية Visual Way لتمثيل العلاقات بين الفئات، فيمكن التعبير عن علاقات التقاطع والاتحاد (الضرب والجمع) الَّتي يمكن أن تنشأ بين فئتين (A , B) مثلاً على النحو التَّالي:
$(A \cup B)$ ، $(A \cap B)$ ، $(A' \cup B)$ ، $(A' \cap B)$ ، $(A \cup B')$ ، $(A \cap B')$ ، $(A' \cup B')$ ، $(A' \cap B')$ ، $(A \cup B)'$ ، $(A \cap B)'$. وهو ما يمكن تمثيله هندسيًّا على النَّحو التَّالي:ئ[٤٩]



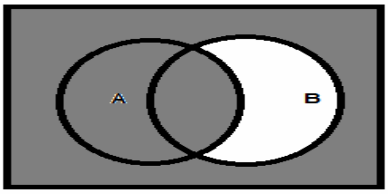
$(A \cup B)$



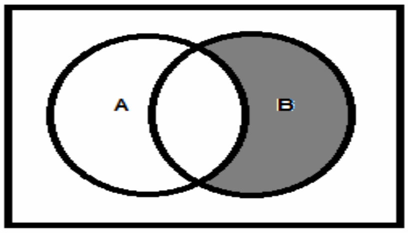
$(A \cap B)$



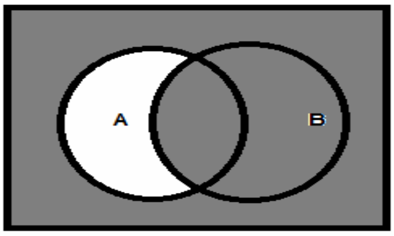
(A' ∪ B)



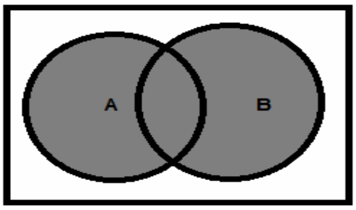
(A'∩ B)



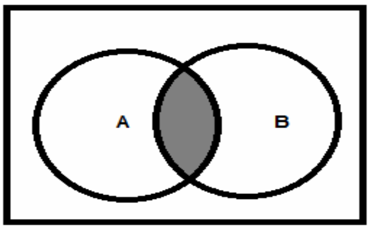
(A ∪ B')



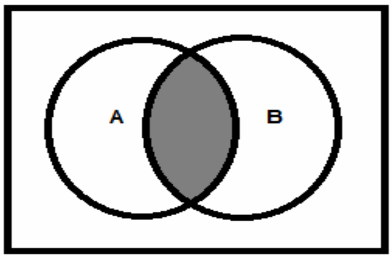
(A ∩ B')



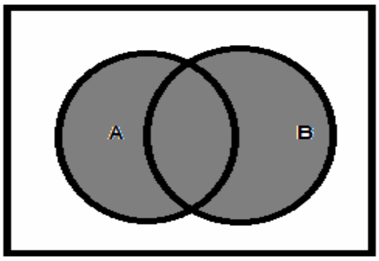
(A∪ B)'



(A ∩ B)'



(A'∪ B')



(A' ∩ B')

شكل رقم (١٨)

وبطبيعة الحال فالأمر لا يقف عند هذا الحد ، وإنما بإمكان أشكال فن التعبير عن العلاقات كافة الَّتي يمكن أن تنشأ بين الفئات ، دون أن يكون الأمرُ مقصورًا على الجمع والضرب فحسب ، غير أن الأمر الَّذي نقصده هنا يتعدى ذلك، بمعنى أن مخططات فن هنا يمكن أن تستخدم للبرهنة على مدى صحة قوانين حساب الفئات.

فإذا كان لدينا مثلاً مجموعة من الاستدلالات الخاصة بحساب الفئات، والَّتي يمكن أن تتمثل في الآتي:

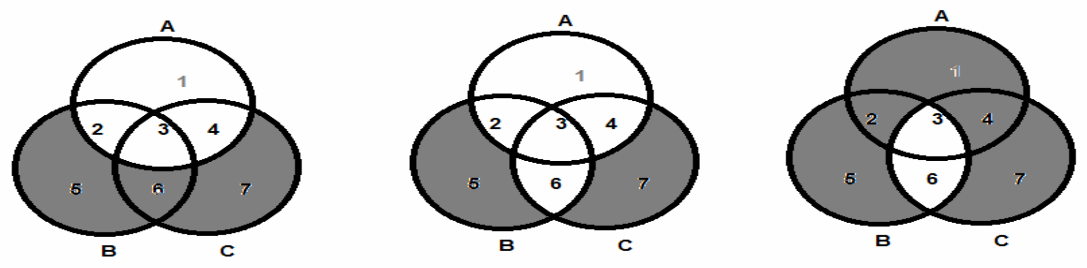
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cap B = (A' \cup B')'$
- $A \cup B = (A' \cap B')'$

فإنه يمكننا إثبات صحة هذه الاستدلالات من خلال أشكال فن على النحو التالي:[٥٠]

فبالنسبة للاستدلالين الأول والثاني- وهما يمثلان قانوني دي مورجان- فنحن لسنا مضطرين لرسم مخططات فن مرة أخرى لإثبات مدى صحتهما، ويكفي النظر إلى الشَّكل رقم (١٨) للتأكد من صحة هذين القانونين .

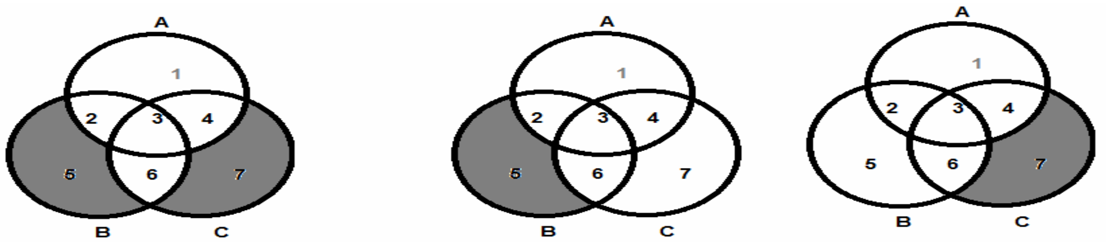
أما فيما يتعلق بالاستدلال الثالث والرابع –وهما يمثلان قانوني الاستغراق- فسوف نقوم في البداية بمحاولة البرهنة على مدى صحة القانون الثالث ، وذلك من خلال رسم مخطط فن على نموذج الدوائر نمثل به الطرف الأيمن فى هذا القانون، والَّذي يكون على الصورة:



(A) $A \cup (B \cap C)$ $(B \cap C)$

شكل رقم (١٩)

ومن خلال هذا الشَّكل نلاحظ أننا في الرسم الأول منه حددنا الأقسام الَّتي يتقاطع فيها B ، C $(B \cap C)$ والَّتي تمثلت في الأقسام : ٣، ٦ ثم حددنا فى الرسم الثالث من الشَّكل رقم (١٩) الفئة (A) والتي تتمثل بطبيعة الحال في الأقسام: ١، ٢، ٣، ٤ وباتحادها مع الرسم الأول ينتج الرسم الثَّاني، والَّذي يعبر عن $A \cup (B \cap C)$ وهى ما يمثل الطرف الأول في القانون الثالث ، ثم نقوم برسم آخر يمثل الطرف الثاني، والَّذي يظهر على الصورة التَّاليَة:

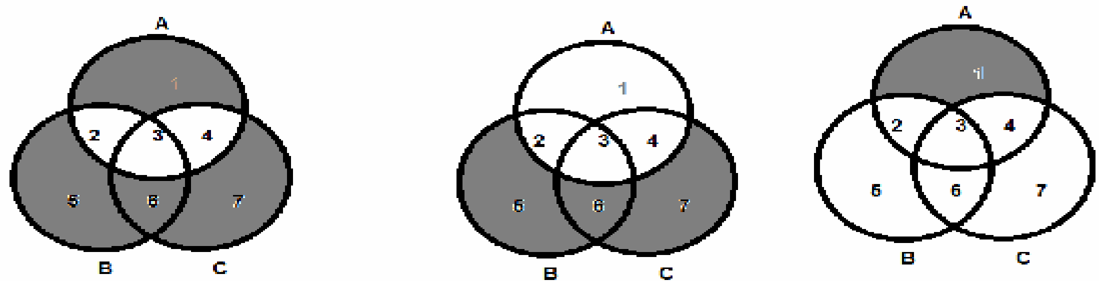


$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ $(A \cup C)$ $(A \cup B)$

شكل رقم (٢٠)

والَّذي يتضح من خلاله أن الطرفين لهما الرسم نفسه ؛ حيث إنَّ الرسم الثالث في الشَّكل رقم (٢٠) هو الرسم الثاني نفسه الموجود في الشَّكل رقم (١٩) ، وعليه فالقانون صحيح.

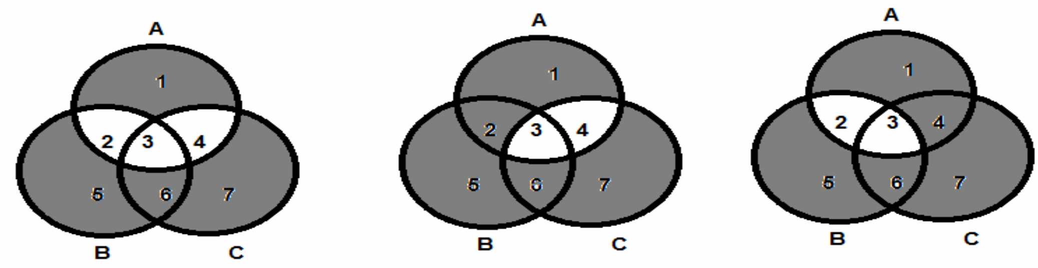
وبالطريقة نفسها ننتقل إلى محاولة إثبات القانون الرابع ، فنقوم في البداية كما تعودنا برسم الطرف الأول ، والذي يمكن أن يظهر على الصورة التَّاليَة:



A ∩ (B U C)　　(A)　　(B U C)

شكل رقم (٢١)

ثم نحاول بعد ذلك أن نرسم للطرف الثاني ، والَّذي يمكن أن يظهر على الصورة التَّاليَة:



(A ∩ B) U (A ∩ C)　　(A ∩ C)　　(A ∩ B)

شكل رقم (٢٢)

وعند النظر إلى الرسم الثالث في الشَّكلين (٢١)، (٢٢) يتضح لنا أن الرسمين متطابقين ، وعليه فالقانون صحيح.

أما فيما يتعلق بالاستدلالين الأخيرين – وهما يمثلان تعريف الجمع والضرب في حدود بعضهما البعض – فيمكن إدراك مدى صحتهما بشكل حدسي من خلال الرسومات الموجودة في الشكل رقم (١٨)، وهكذا وبالطريقة نفسها يمكننا المضي لإثبات صحة العديد من القوانين المتعلقة بحساب الفئات.

ثالثًا: مخططات فن واستخدامها في الكشف عن صحة الاستدلالات في حساب القضايا.

يبدو – كما ذكرنا آنفا– أن مخططات فن ليست مقصورة على التعبير عن القضايا الحملية ، أو البرهنة على مدى صحة الأقيسة المنْطقيَّة ، وإنما يمكن أن تمتد لتغطى جانبًا كبيرًا من الأفكار والنظريات فى مجال المنطق ، بل وربما في مجالات أخرى متعددة.

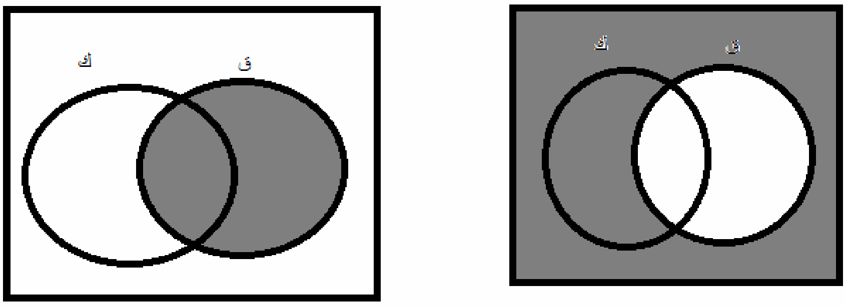
هذا وإذا كنا في المبحث السابق وضحنا كيف يمكن لمخططات فن أن تعبر عن شتى العلاقات الَّتي يمكن أن تنشأ بين الفئات ، ووضحنا كيف يمكن استخدامها في البرهنة على صحة القواعد والقوانين الخاصة بالحساب التحليلي للفئات؛ فإننا ومن خلال هذه الصفحات سنحاول أن نوضح كيف يمكن لمخططات فن أن تعبر عن دوال الصدق وكيف يمكن استخدامها فى البرهنة على مدى صحة الاستدلالات والقواعد المنْطقيَّة في الحساب التحليلي للقضايا.

وقد يبدو الأمر مستغربًا ، حيث أن مخططات فن تقوم أساسا على فكرة الفئات وما ينشأ بينها من علاقات ، فكيف لنا إذن أن نطبقها على القضايا ، ولكن إذا كان هناك من حاول البرهنة على صحة الاقيسة الأرسطية من خلال قوائم الصدق، وذلك بعد تحويل قضايا القياس إلى دالات صدق وصبغها بالسمة الرمزية الخالصة، ومن ثم تطبيق طريقة القوائم عليها للتأكد من مدى صحتها. [٥١]

وإذا كان معظم العمليات المنطقية في حساب القضايا تتشابه ونظائرها فى الحساب التحليلي للفئات،فالضرب– مثلاً– في الفئات يقابل العطف في دوال الصدق ، وكذلك الجمع في الفئات يقابل الانفصال في دوال الصدق، وكذلك النفي والتضمن والهوية؛ لذلك فربما يكون الأمر مقبولاً إذا ما حاولنا البرهنة على مدى صحة الاستدلالات في حساب القضايا من خلال مخططات فن البيانية، والتي تم استخدامها من قبل في البرهنة على مدى صحة الاستدلالات في الحساب التحليلي للفئات.

بداية نحاول التعرف إلى دوال الصدق البسيطة في حساب القضايا ، وكيف يمكن تمثيلها على مخططات فن. وهو ما يمكن أن يتمثل في الآتي :

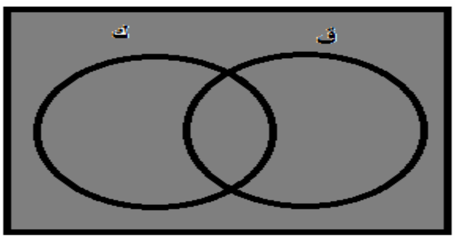
– الدالة المتناقضة: ويرمز لها بالرمز (~ ق) أو (~ ك) حسب القضية الأساسية ، وهذه الدالة تصدق عندما تكون القضية الأصلية كاذبة، والعكس صحيح. ويمكن التعبير هندسيًّا عن مثل هذه الدالة في الآتي:



(ق) (~ ق)

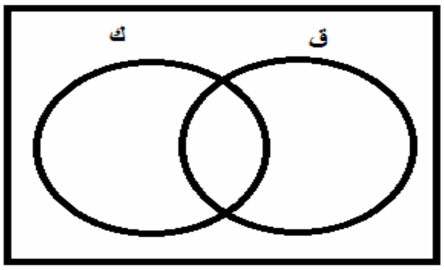
شكل رقم(٢٣)

وما هو جدير بالذكر هنا أن بعض الإشارات العابرة لهذا الموضوع تستخدم التظليل لتعبر به عما هو صادق أو مطلوب ، فهي تشير مثلاً إلى تحصيل الحاصل أو الصدق بالشكل الفني التالي:



شكل رقم (٢٤)

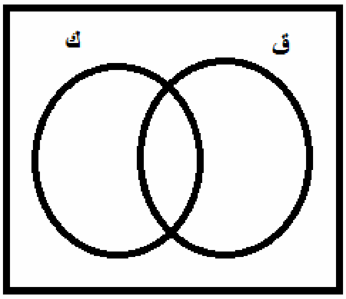
وتشير إلى التناقض أو الكذب من خلال الشكل الفني التالي:[٥٢]



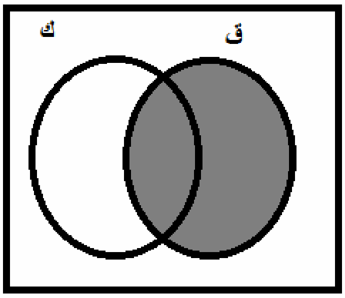
شكل رقم (٢٥)

هذا في حين أنه في تناولنا لهذا الموضوع سوف نستخدم عكس ذلك تماما ؛ وذلك تمشياً مع فكرة التظليل الأساسية في مخططات فن، فنشير بدورنا إلى تحصيل الحاصل أو الصدق من خلال الشكل رقم (٢٥) في حين نستخدم الشكل رقم (٢٤) للإشارة إلى التناقض أو الكذب ، وبشكل مختصر نحن نستخدم التظليل هنا للتعبير عن الكذب.

هذا، وفيما يتعلق بالدالة السابقة فهناك من يشير إلى أننا يمكننا الحصول على العملية (لا) المنطقية من خلال تخيل أن اتحاد كل الحقول في الشكل الفني يمثل الفئة الكلية ، وأنه يمكن الحصول على هذه العملية من خلال طرح الفئة المعطاة من الفئة الكلية ، وهذا ما يمكن التعبير عنه هندسيًا من خلال الشكل التالي:[٥٣]



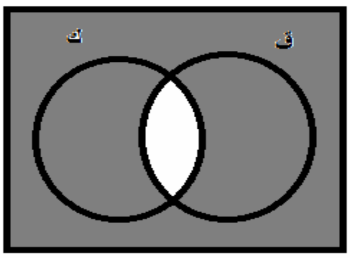
اتحاد كافة الحقول



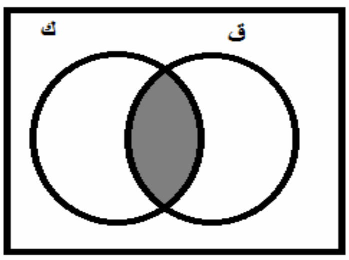
كافة الحقول عدا حقول(ق)

شكل رقم (٢٦)

- الدالة العطفية : والّتي تظهر على الصورة الرمزية (ق . ك) وهى تكون صادقة في حالة واحدة فقط، وذلك عندما تكون كل مكوناتها صادقة ،وتكون كاذبة فيما عدا ذلك ، ويمكن التعبير هندسيًّا عن مثل هذه الدالة من خلال الآتي:



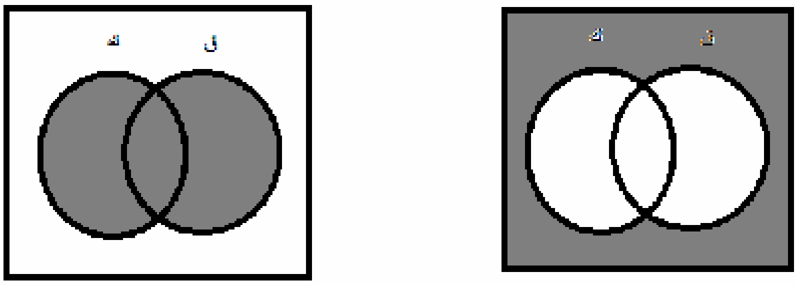
(ق . ك)



~ (ق . ك)

شكل رقم (٢٧)

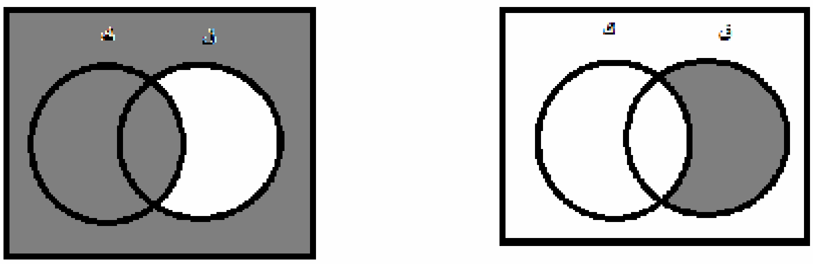
– الدالة الانفصالية : والَّتي تظهر في الصورة الرمزية (ق V ك) وهى تكون كاذبة في حالة واحدة فقط؛ وذلك عندما تكون كل مكوناتها أو بدائلها كاذبة ، وفيما عدا ذلك فهى صادقة، ويمكن تمثيل مثل هذه الدالة هندسيًّا من خلال الآتي:



(ق V ك)　　　~ (ق V ك)

شكل رقم (٢٨)

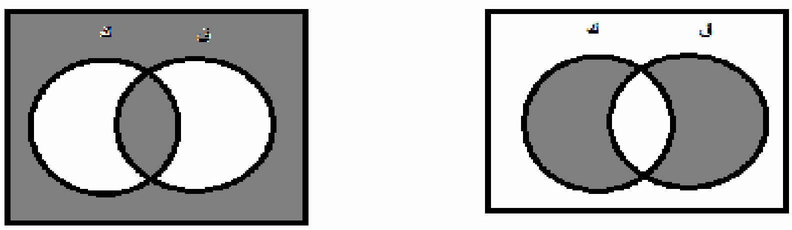
– الدالة اللزومية : وتكون على الصورة الرمزية التَّاليَة (ق ⊃ ك) وهذه الدالة وأمثالها تكون كاذبة في حالة واحدة فقط، وذلك عندما يكون المقدم صادقًا والتالي كاذبًا ، وفيما عدا ذلك فهى صادقة ويمكن تمثيلها هندسيًّا من خلال الشَّكل الآتي:



ق ⊃ ك　　　~ (ق ⊃ ك)

شكل رقم (٢٩)

– الدالة التكافؤية : والَّتي تظهر في الصورة الرمزية التَّاليَة (ق ≡ ك) وتكون هذه الدالة صادقة عندما يكون لمكوناتها قيمة الصدق نفسها، بمعنى عندما تكون مكوناتها كلها صادقة أو كلها كاذبة ، وتكذب فيما عدا ذلك ، ويمكن تمثيل مثل هذه الدالة هندسيًّا من خلال الآتي:



(ق ≡ ك)　　　~ (ق ≡ ك)

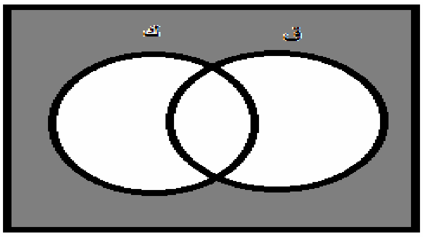
شكل رقم (٣٠)

نحاول الآن البرهنة على نماذج من الاستدلالات المنْطقيَّة في حساب القضايا باستخدام أشكال فــن ، ولنبدأ ببعض التعريفات من قبيل:

- ق ∨ ك = ~ (~ ق . ~ ك).

وللبرهنة على مدى صحة هذا التعريف نقوم في البداية بالتمثيل للطرف الأيمن(ق ∨ ك)

والذي ظهر لدينا من قبل في الشَّكل رقم (٢٨) على النحو التالي:

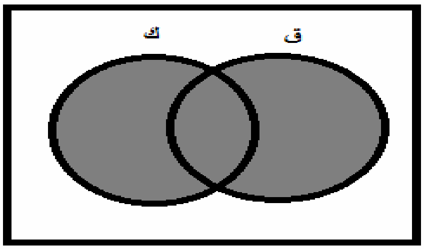


(ق ∨ ك)

شكل رقم (٣١)

ثم نحاول بعد ذلك أن نمثل للطرف الآخر، ونمثل فيه في البداية للدالة العطفية(~ ق . ~ ك) ،

والَّتي يمكن أن تظهر على الصورة التَّاليَة:

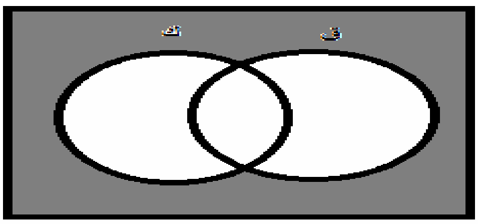


(~ ق . ~ ك)

شكل رقم (٣٢)

ثم نرسم لنقيض الدالة السابقة وهو ما يمثل الطرف الآخر برمته ~ (~ ق . ~ ك) ، وهو ما

يمكن أن يظهر على الصورة التَّاليَة:



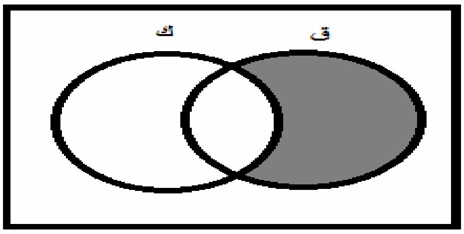
~ (~ ق . ~ ك)

شكل رقم (٣٣)

وبمقارنة الشَّكل رقم (٣١) الذي يمثل الطرف الأيمن بالشَّكل رقم (٣٣) الذي يمثل الطرف الأيسر من التعريف السابق؛ نجد أن الشَّكلين متطابقان ، وهو ما يؤدى بدوره إلى الحكم على هذا التعريف بأنه سليم. وننتقل إلى تعريفٍ آخر من قبيل :

- ق ⊃ ك = ~ ق ∨ ك

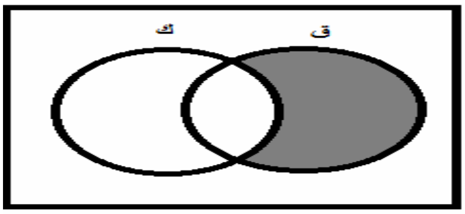
وكما تعودنا فى التعريف السابق ، نحاول أن نضع كلَّ طرفٍ من أطراف التعريف في صورة مخطط فن ، ثم نعقد مقارنةً بينهما ؛ لنرى إن كانا متطابقين– ووقتها يكون التعريف صحيحًا_ أم أنَّهمَا غير متطابقين ، مما يؤدى إلى فساد التعريف. نمثل في البداية للطرف الأيمن (ق ⊃ ك) والذي ظهر معنا من قبل من خلال الشَّكل رقم (٢٩) على النحو التالي :



(ق ⊃ ك)

شكل رقم (٣٤)

ثم نمثل بعد ذلك للطرف الأيسر (~ ق ∨ ك) والذي يكون على الصورة التَّاليَة:



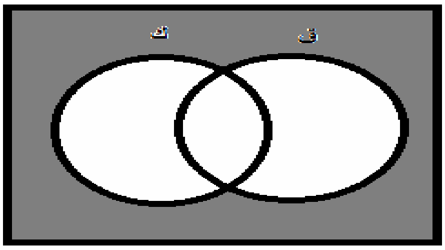
(~ ق ∨ ك)

شكل رقم (٣٥)

وبمقارنة الشَّكلين السَّابقين مع بعضهما البعض نجد أنَّهمَا متطابقان، وعليه فالتعريف صحيح. وننتقل_أيضًا _إلى تعريفٍ آخر من قبيل :

- (ق ∨ ك) = ق ⊃ ~ ك.

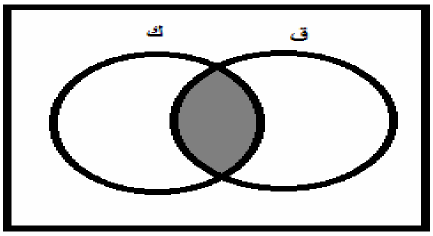
نرسم في البداية للدالة الانفصالية (ق ∨ ك) الَّتي تمثل الطرف الأيمن، والَّتي ظهرت معنا من قبل من خلال الشَّكل رقم (٢٨) على النحو التالي:



(ق ∨ ك)

شكل رقم (٣٦)

ثم نقوم برسم الطرف الأيسر من التعريف السابق (ق ⊃ ~ ك) ، والذي يظهر علـــى الـــصورة التَّاليَة:



(ق ⊃ ~ ك)

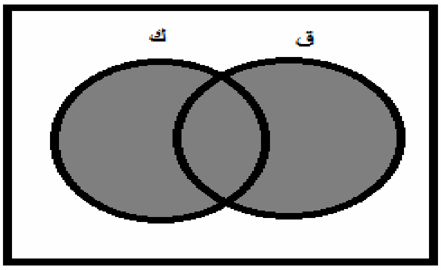
شكل رقم (٣٧)

ثم نقارن بين الشَّكل رقم (٣٦) والشَّكل رقم (٣٧) ، وهما يمثلان طرفي التعريف ، فنجــد أنَّهمَــا غير متطابقين ، وعلى الفور نستنتج أن التعريفَ السابقَ غير صحيح.

هذا عن بعض التعريفات في الحساب التحليلي للقضايا، ونحاول الآن البرهنة علـــى مـــدى صـــحة بعض القوانين المنْطقيَّة ، ونذكر منها _على سبيل الذكر_ المثال الآتي:

- ~ (ق ∨ ك) ≡ ~ ق . ~ ك
- ~ (ق . ك) ≡ ~ ق ∨ ~ ك

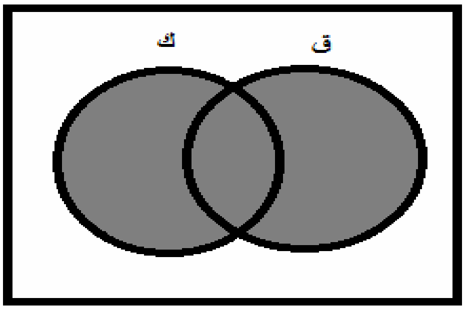
فنحن نحاول في القانون الأول أن نرسم للطرف الأيمن ، فنرســـم للدالـــة الانفـــصالية (ق∨ ك) والَّتي ظهرت معنا أكثر من مرة ، ثم نرسم لنقيضها، والَّذي يكون على الصورة التَّاليَة:



~ (ق ∨ ك)

شكل رقم (٣٨)

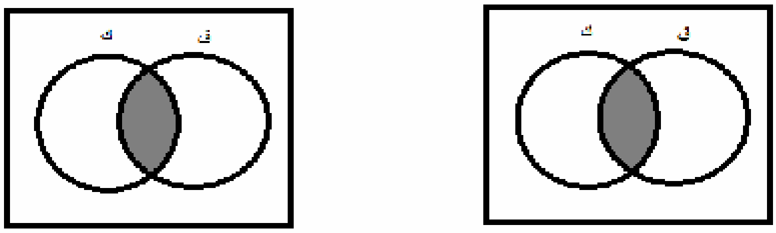
ثم نرسم للطرف الأيسر فى القانون الأول (~ ق . ~ ك) ،والذي يمثل التقاطع بين ~ ق ، ~ ك ، والذي يكون على الصورة التَّاليَة:



(~ ق . ~ ك)

شكل رقم (٣٩)

وعند مقارنة الشَّكلين السابقين معا نجد أنَّهمَا متطابقان، وعلى ذلك فالقانون صحيح. وهكذا الحال بالنسبة للقانون الثاني ، والذي يظهر طرفاه من خلال أشكال فن في الشَّكل التالي:



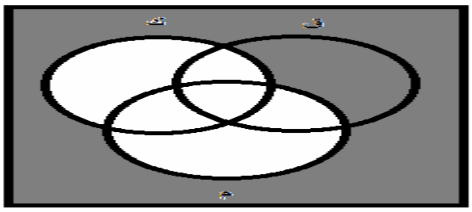
~ (ق . ك)   ~ ق V ~ك

شكل رقم (٤٠)

وبمقارنة الرسمين معًا في الشَّكل رقم (٤٠) يتضح على الفور أنَّ القانون صحيح.
ونحاول الآن أن نبرهن على صحة بعض المبادئ المنْطقيَّة في حساب القضايا باستخدام مخططات فن ، ونذكر من بين هذه المبادئ ما يلي :

- ق V (ك V م) ⊃ ك V (ق V م)

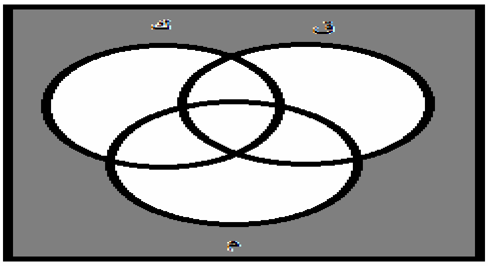
وهو ما يمثل مبدأ الربط في حساب القضايا، ولكي نتأكد من مدى صحة هذا المبدأ نقوم بتمثيل الطرف الأيمن فيه، أو ما يسمى بالمقدم ق V (ك V م)، وبالتحديد البديل الثاني فيه(ك V م) والذي يظهر على الصورة التَّاليَة:[٥٤]



(ك V م)

شكل رقم (٤١)

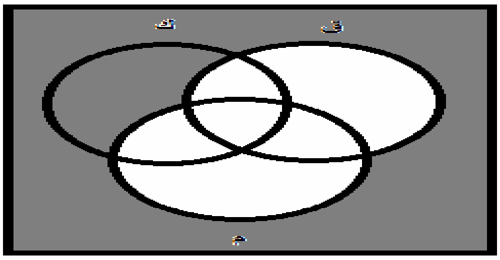
ثم نقوم بتمثيل المقدم بشكلٍ كاملٍ بعد إضافة (ق) إليه، والذي يكون في صورته النِهائيَّة على النَّحو التَّالي:



ق ∨ (ك ∨ م)

شكل رقم (٤٢)

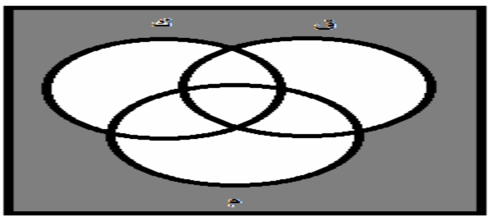
وبالطريقة ذاتها نحاول أن نمثل للطرف الأيسر، أو التالي فيكون البديل الثاني منه على النحو التالي:



(ق ∨ م)

شكل رقم (٤٣)

ويكون الرسم النهائي للتالي بعد إضافة (ك) إليه على النحو التالي :



ك ∨ (ق ∨ م)

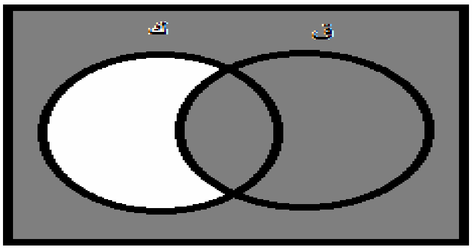
شكل رقم (٤٤)

وعند مقارنة الشَّكلين (٤٢) ، (٤٤) نجد أنَّهمَا متطابقان؛ وعليه فالمبدأ صحيح، ولكن يجب أن نشير هنا أن التطابق بين الشَّكلين – وهو ما يمثل هذه الصورة الاستدلالية– ليس هو الفيصل ، فأحيانا لا يكون هناك تطابق تام بين الشَّكلين ، ومع ذلك نقرُّ أن المبدأ أو القاعدة الَّتي تمثلهما صحيحة، والفيصل الرئيس إن لم يكن هناك تطابق هو اللجوء إلى حالات صدق الدالة اللزومية ، وتطبيقها على الشَّكلين كما سنرى لاحقًا.

فإذا أردنا مثلا أن نبرهن باستخدام مخططات فن على مدى صحة القاعدة التَّاليَة :

– [(ق ∨ ك) . ~ ق] ⊃ ك .

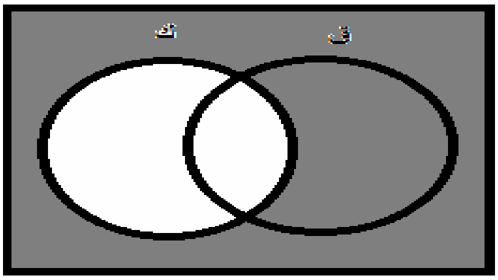
نقوم في البداية بالتمثيل للطرف الأيمن أو المقدم ، والذي يمكن أن يظهر في صورته النهائيَّة على النحو التالي:



[(ق ∨ ك) . ~ ق]

شكل رقم (٤٥)

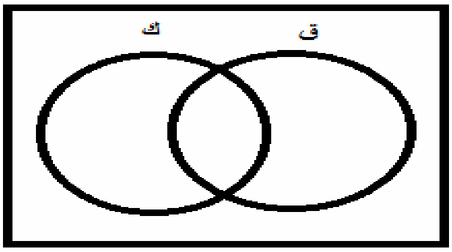
ثم نمثل بعد ذلك لــ (ك) الَّتي تمثل التالي، وقد ظهرت معنا في الشَّكل رقم (٣٦) وكانت على الصورة التَّاليَة:



(ك)

شكل رقم (٤٦)

فالشَّكلان (٤٥) ، (٤٦) اللذان يمثلان طرفي القاعدة غير متطابقين ، ومع ذلك فالقاعدة توصف بأنَّها صحيحة ؛ حيث إننا لو طبَّقنا شروط الصدق الخاصة بالدالة اللزوميَّة على الشَّكلين السَّابقين ، ينتج بالفعل أن القاعدة صحيحة ، ويمكن تمثيل تطبيق هذه الشُّروط على الشَّكلين في الشَّكل التَّالي:



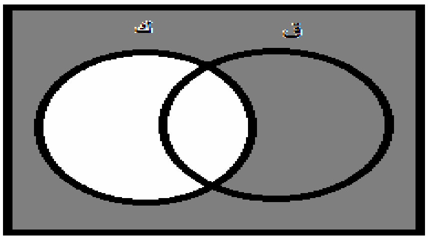
[(ق ∨ ك) . ~ ق] ⊃ ك

شكل رقم(٤٧)

وأخيرًا نحاول أن نبرهن على مدى صحة القاعدة التَّاليَة:

– [(ق ∨ ك) . ك] ⊃ ~ ق.

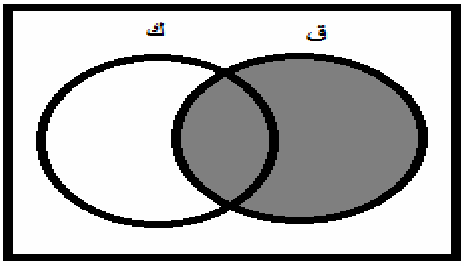
وفيها نمثل للطرف الأيمن أو المقدم ، والذي يظهر في صورته النهائيَّة على النحو التالي :



[(ق ∨ ك) . ك]

شكل رقم (٤٨)

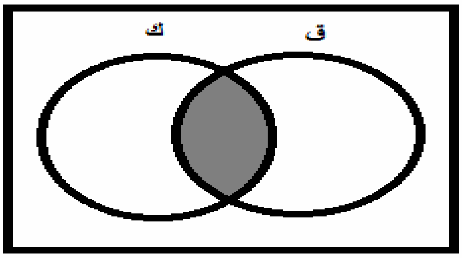
ثم نمثل للتالي (~ ق) والذي ظهر معنا _أيضًا _في الشَّكل رقم (٢٦)، وكان على الصورة التَّاليَة:



(~ ق)

شكل رقم (٤٩)

وعند مقارنة الشَّكلين السابقين نجد أنَّهمَا غير متطابقين، بل وحتى عند اللجوء إلى شروط الصدق الخاصة بالدالة اللزوميَّة ، وتطبيقها على الشَّكلين السَّابقين كلٌّ في موضعِهِ ينتج لنا الشَّكل التالي:



[(ق ∨ ك) . ك] ⊃ ~ ق

شكل رقم (٥٠)

ومن خلال وجود حقل مظلل (كاذب) ندرك على الفور عدم صحة هذه القاعدة. وهكذا يمكن القول : إن طريقة مخططات فن يمكن أن تضاف إلى الطرق الأخرى المستخدمة في الكشف عن مدى صحة الاستدلالات في الحساب التحليلي للقضايا.

نتائج البحث :

من خلال هذه المعالجة لمخططات فن ، ومحاولة تطبيقها في البرهنة على مدى صحة الاستدلالات فى المنطق الكلاسيكي؛ توصلنا إلى مجموعة من النتائج يمكن عرضها في النقاط الآتية:

١- إن طريقة المخططات البيانية عند جون فن طريقة ممنهجة من خلال ما تتضمنه من أفكار أساسية وقواعد محددة تحكم سير العمل بها ، حيث إن رسم مثل هذه لمخططات لا يتم بشكل عشوائي وإنما وفقـًا لقواعد محددة.

٢- إن مخططات فن جاءت ناقصة من حيث أنها لم تخصص منطقة مغلقة لمقولة الكل ، وهذا ما فعله لويس كارول –مثلاً – في مخططاته. هذا من جانب، ومن الجانب الآخر اتهام فن بأنه لم يقدم أشكالا لاستدلالات تتضمن أكثر من ست فئات اتهام باطل، فعلى الرغم من أن فن لم يقدم مثل هذه الأشكال إلا انه وضع الصيغة أو المبدأ الذي يمكن من خلاله تصور مثل هذه الأشكال.

٣- إن جون فن لم يكتف بالشكل الدائري الخالص في مخططاته لعرض صور الاستدلالات والبرهنة علي مدى صحتها في المنطق التقليدي- والتي وقفت عاجزة عن التعبير عن الاستدلالات التي تتضمن أربع فئات فأكثر- وإنما استخدم أشكالا أخرى من قبيل القطع الناقص مثلاً.

٤- إن هناك تشابهـًا كبيرًا بين الطريقة التي نحصل بها على عدد الحقول في كل مخطط من مخططات فن ، وبين تلك الطريقة التي نحصل بها على عدد الصفوف الخاصة بقائمة صدق ما في حساب القضايا الكلاسيكي.

٥- إن مخططات فن يمكن تطبيقها على الحساب التحليلي للقضايا ؛ حيث يمكنها وبسهولة التعبير عن شتى دوال الصدق فيه، والعلاقات التي يمكن أن تنشأ بينها ، كما أنها يمكن وبسهوله أن تستخدم في البرهنة على مدى صحة الاستدلالات في حساب القضايا مثلها في ذلك مثل قوائم الصدق.

٦- إن مخططات فن يمكن وبسهولة تطبيقها للبرهنة على مدى صحة الاستدلالات الخاصة بحساب الفئات في المنطق الكلاسيكي، وذلك من خلال قدرتها الدقيقة في التعبير عن شتى العلاقات التي يمكن أن تربط بين الفئات.

مصادر البحث ومراجعه

أولاً: المراجع العربية:

- إسلام، عزمي، الاستدلال الصوري، مكتبة سعيد رأفت، جامعة عين شمس.الطبعة الثانية الجزء الثاني ، ط٢، ج٢، ، ١٩٨١.
- السرياقوسي، محمد، التعريف بالمنطق الرياضي، الإسكندرية، دار الثقافة، ١٩٧٨م.
- النشار ، على سامي، المنطق الصوري منذ أرسطو حتى عصورنا الحاضرة، الإسكندرية، دار المعرفة الجامعية، ٢٠٠٠م .
- بلانشي، روبير ، المنطق وتاريخه منذ أرسطو حتى رسل ، ترجمة: خليل أحمد خليل، بيروت، المؤسسة العربية للدراسات والنشر. بدون تاريخ.
- رشوان، محمد مهران، مبادئ التَّفكير المنطقي، القاهرة، دار المعارف، ١٩٩٤م.
- ــــــــــــ، مدخل إلى المنطق الصوري، القاهرة، دار الثقافة للنشر والتوزيع، ١٩٧٥ م.
- ــــــــــــ، مقدمة فى المنطق الرمزى، القاهرة، دار الثقافة للنشر والتوزيع، ١٩٩٩ م.

ثانياً: المراجع الأجنبية:

- Barker, Stephen. F. : The Elements of Logic,5th Edition, New York, 1985.
- Bowles, lignette.j : Logic Diagrams for up to N Classes, The mathematical Gazette, Vol.55, No.394 (Dec., 1971)
- Carroll, Lewis: Symbolic Logic, Part,1.,"Elementary", 2nd Edition, Macmillan and Co., LTD.,New York, 1896.
- Dumitriu, Anton: History of Logic , Vol. 4, Abacus press, 1977.
- Grunbaum, Branko: The Construction of Venn Diagrams, The College Mathematics Journal , Vol. 15,No.3 (Jun., 1984).
- Hamilton, Sir William : Lectures on Metaphysics and Logic, Vol.3., William Blackwood and Sons, Edinburgh and London, 1974.
- Hammer, Eric M.: Diagrams , Logic and Representation , Indiana University,1995.
- Humphries, mike: Venn Digrams using Convex Sets, The Mathematical Gazette,Vol. 71, No. 455 (Mar., 1987).
- Kelley, David: The Art of Reasoning ,3rd Edition, w.w.Norton & Company, New York,1998.

- **Kneale,W and Kneale,M: The Development of Logic, Oxford University Press, New York. 1962.**
- **Kung, Mou-liang and Harrison, G.C., Is The Venn Diagram Good Enough , The college Mathematics Journal , Vol. 15,No. 1(Jan.,1984).**
- **Langer, Susanne. K.: An Introduction to Symbolic Logic , 2nd Edition, Dover Publications , INC., New York, 1952.**
- **Lewis, C.I.: A Survey of Symbolic Logic, University of California Press, Berkeley, 1918,**
- **Mellone, Sydney Herbert: An Introductory Text-Book of Logic, 3rd Edition , William Black Wood and Sons, London , 1907.**
- **Lewis pakula, A Note on Venn Diagrams, The American Mathematical Monthly,Vol.96, No.1(Jan., 1989), P. 38**
- **Sato, yui, Mineshima, Koji and Takemura, Ryo: Interpreting Logic Diagrams: A Comparison of Tow Formulations of Diagrammatic Representations, proceedings of 33rd Annual Conference of the cognitive science society , 2011.**
- **Stephanie , M. : Venn Diagrams, The Mathematics Teacher, Vol. 56, No. 2(February, 1963) , PP. 98 , 101**
- **Stewart , Ian : The Truth about Venn Diagrams, The Mathematical Gazette, Vol. 60 , No. 411(Mar., 1976), PP. 47 – 54**
- **Venn, John : On The Forms of Logical Proposition, Mind, Vol.5, No.19 (Jul., 1880), PP. 336- 349**
- **– ---------- : SymbolicLogic, Macmillan and co.,London,1881.**
- **Verdenduin, P.G.J., : The Conclusive force of Venn Diagrams and the Implication , Educational Studies in Mathematics,Vol.1, No.4(Mar.,1969), PP.394,401.**

هوامش البحث :

(1) محمد السرياقوسي، التعريف بالمنطق الرياضي، الإسكندرية، دار الثقافة، ١٩٧٨م. ص (١٣٤).
(2) محمد مهران ، مبادئ التفكير المنطقي، القاهرة،دارا لمعارف، ١٩٩٤م. ص (١٧١)
(3) David, Kelley: The Art of Reasoning , 3rd Edition, w.w. Norton & Company, New York,1998. p. 205
(4) Ibid. , p. 211
(5) yui,Sato , Koji Mineshima and Ryo Takemura: Interpreting Logic Diagrams: A Comparison of tow Formulations of Diagrammatic Representations, proceedings of 33rd Annual Conference of the cognitive sciencesociety, 2011, p. 2182 .
(6) انظر فى ذلك : محمد مهران، مقدمة فى المنطق الرمزى ، دار الثقافة ، ص ٢٩٥
(7) John,Venn: Symbolic Logic,Macmillan and co., London,1881.P.100
(8) محمد السرياقوسي ،التعريف بالمنطق الرياضي، ص(١٥٩ : ١٥٨)
(9) محمد مهران، مدخل إلى المنطق الصوري، القاهرة، دار الثقافة للنشر والتوزيع، ١٩٧٥م ص (١٦٠:١٦١).
(10) David, Kelley: The Art of Reasoning ,P.209
(11) John ,Venn : Symbolic Logic, p. 105
(12) محمد مهران، مبادئ التفكير المنطقي، ص (١٧٤).
(13) John ,Venn : Symbolic Logic, p. 10 2
(14) Anton Dumitriu: History of logic,Vol.4, Abacus press, 1977, PP. 17-19
(15) لمزيد من المعلومات حول هذه المحاولة ، انظر:
C.I. Lewis: A Survey of Symbolic Logic, University of California Press, Berkeley, 1918,P.176.
- Sir William Hamilton: Lectures on Metaphysics and Logic, Vol.3., William Blackwood and Sons, Edinburgh and London, 1974. PP.255-256
(16) روبير بلانشي، المنطق وتاريخه منذ أرسطو حتى رسل ، ترجمة: خليل أحمد خليل، بيروت، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، بدون تاريخ.ص (٣١٩).وانظر أيضًا: على سامي النشار، المنطق الصوري منذ أرسطو حتى عصورنا الحاضرة، ص (١٨٦).
(17) على سامي النشار،المنطق الصورى منذ أرسطو حتى عصورنا الحاضرة ، ص (١٨٧).
ولمزيد من التفاصيل حول هذا الموضوع انظر:
- Lewis, Carroll: Symbolic Logic, Part,1., "Elementary", 2nd Edition, Macmillan and Co., LTD.,New York, 1896. PP. 178 - 180
(18) روبير بلانشي، المنطق وتاريخه منذ أرسطو حتى رسل، ص (٣٢٣).
(19) محمد السرياقوسي، التعريف بالمنطق الرياضي،ص (١٣٨:١٣٩). وانظر أيضاً:
- Anton Dumitriu: History of logic P.34
وانظر: روبير بلانشي، المنطق وتاريخه منذ أرسطو حتى رسل، ص(٣٢٤).
(20) Eric M. Hammer: Diagrams , Logic and Representation, Indiana University , 1995
(21) John ,Venn : Symbolic Logic , p. 100
(22) Lewis, Carroll: Symbolic logic,PP. 174-182

(23) Ibid., p. 100

(24) Ibid.,

(25) انظر في ذلك: David, Kelley: The Art of Reasoning, pp. 205 – 206

(26) Lewis pakula,Anote on Venn Diagrams, The American Mathematical Monthly,Vol.96, No.1(Jan., 1989), P. 38

(27) John ,Venn: Symbolic Logic, p. 106

(28) وهذا ما حدث بالفعل بين طالب وأستاذه عندما أشار الأستاذ إلى أن دوائر فن صالحة لعدد(n) من الفئات، وأنه يمكن الحصول على الحقول المستقلة من خلال الصيغة (٢ ن) ، حيث تشير (ن) إلى عدد الفئات ، ولكن الطالب قاطع أستاذه متسائلاً كيف يمكن أن يطبِّقَ ذلك مع أربع فئات؟ ، فقام الأستاذ بكل ثقةٍ بتطبيق الصيغة، فكان لديه ستة عشر حقلاً مستقلاً، ثم قام برسم مخطط فن لأربعة دوائر ، وحاول أن يحصر الستة عشر حقلاً على الرسم ، ولكنه لم يستطع، وتوقف عند الحقل الرابع عشر، ولكي يخرج الأستاذ من هذا الموقف المحرج لجأ إلى صيغةٍ أخرى يمكننا من خلالها الحصول على الحقول المستقلة والّتي تتمثل في الآتي : n - @ n + 2 ، وعلى الرغم من أنَّ الصيغة الأولى سليمة، إلا أن الخطأ حدث عندما تم استخدام الدوائر للتعبير عن هذا العدد من الفئات . (انظر فى ذلك):

- Kung, Mou-liang and Harrison, G.C., Is The Venn Digram Good Enough The college Mathematics Journal , Vol. 15,No. 1(Jan.,1984).

(29) John ,Venn : Symbolic Logic, p. 103

(30) وتجدر الإشارة هنا إلى أن ثمة تشابهـًا كبيراً بين الطريقة التي نحصل بها على عدد الحقول الناتجة من تقاطع الدوائر، وتلك الطريقة الخاصة بمعرفة عدد الصفوف في تشكيل قوائم الصدق الخاصة بدوال القضايا، فالصيغة المستخدمة واحدة (٢ ذ) ، وإذا كانت (~) تشير إلى عدد الدوائر التي تمثل الفئات عند فن ، فهي بالمثل تشير إلى عدد المتغيرات الموجودة في دالة صدق ما ، وكذلك العدد (٢) فهو إن كان يشير في تشكيل القوائم إلى قيمة الصدق (ص/ك)، فهو يشير في مخطط الدوائر إلى التظليل (الفراغ) أو عدم التظليل (وجود أعضاء).

(31) John ,Venn : Symbolic Logic, p.104.

(32) روبير بلانشي،المنطق وتاريخه منذ أرسطو حتى رسل، ص(٣٨٨)

(33) انظر في ذلك:

- C.I. Lewis: A Survey of Symbolic Logic, PP.178-179.
- M. Stephanie: Venn Diagrams, The Mathematics Teacher, Vol. 56, No. 2(February, 1963) , PP. 98 , 101

(34) روبير بلانشي،المنطق وتاريخه منذ أرسطو حتى رسل،ص(٣٨٩).

(35) W, Kneale, and M, Kneale,: The Development of Logic, p. 420

(36) Lignette.J.Bowles: logic Diagrams for up to N Classes, The mathematical Gazette, Vol.55, No.394 (Dec., 1971) p. 370

(37) Branko Grunbaum: the Construction of Venn Diagrams, The College Mathematics Journal , Vol. 15,No.3 (Jun., 1984)

(38) Lewis, Carroll: Symbolic logic,P. 175

(39) المقصود هنا بالشكل القياسي أن يكون الشكل المستخدم موحَّدًا_ كالدائرة أو القطع الناقص أو المستطيل أو غير ذلك _؛لأن هناك ما يسمى بالشكل اللاقياسي , ويقصد به الشكل

المختلط , كأن يتركب شكل فن مثلاً مـــن دوائـــر ومـــستطيلات , أو مـــن قطـــع نـــاقص ومستطيلات, أو دوائر وحدوة حصان، وهكذا.

(40) Lewis Pakula: A Note on Venn Diagrams, pp. 38 – 39

(41) John ,Venn : Symbolic Logic, p.107

(42) Mike Humphries: Venn Digrams using Convex Sets, The Mathematical Gazette,Vol. 71, No. 455 (Mar., 1987).

(43) Linette. J. Bowles: Logic Diagrams for up to N Classes,p372- 373

(44) وثمة العديد من الدراسات التي تناولت هذا الموضوع بالدراسة والتحليل ، لذا لن نتعـــرض له تفصيلاً ونكتف هنا بالإشارة إلى بعض الجوانب من هذا الموضوع في حدود مـــا يخـــدم موضوعنا.

(45) انظر في ذلك: David, Kelley: The Art of Reasoning p. 208

(46) وذلك ما عرضه عزمي إسلام في كتابه الاستدلال الصوري. وانظر أيضًا:
Stephen F Barker: The Elements of Logic, 5th Edition, New York, 1985 PP. 32 – 33

(47) محمد السرياقوسي. التعريف بالمنطق الرياضي . ص(١٦٠).

(48) Yui,Sato, Koji Mineshima and Ryo Takemura: Interpreting Logic Diagrams,P.3185

(49) انظر في ذلك:

- Susanne K. Langer: An Introduction to Symbolic Logic, 2nd Edition, Dover Publications, INC., New York, 1952,P.148-149
- وإن كانت الأشكال التي قدمتها سوزان لانجر لمثل هذه العمليات تختلف عـــن الأشـــكال التي قدمنا لها في المتن؛ حيث إن لانجر تحدد الحقول التي يتواجد بها أعضاء من خلال التظليل أو استخدام الخطوط الأفقيَّة، في حين أننا – تمشيًّا مع طبيعة البحـــث– نـــستخدم التظليل لنعبِّرَ به عن الفراغ ، أو نحدد به الحقول التي لا يتواجد بها أعضاء.وهـــذا مـــا نسوف نتبعه أيضًا في تناولنا لأشكال فن في منطق القضايا في المبحث القادم.

(50) انظر في ذلك:

- P.G.J., Verdenduin : The Conclusive force of Venn Diagrams and the Implication , Educational Studies in Mathematics, Vol.1, No.4(Mar., 1969), PP. 394, 401
- Ian Stewart: The Truth about Venn Diagrams, The Mathematical Gazette, Vol. 60 , No. 411(Mar., 1976), PP. 47 - 54

(51) – انظر في ذلك مثلاً:

- عزمي إسلام، الاستدلال الصوري، المرجع السابق.
- محمد مهران رشوان، مقدمة للمنطق الرمزي، المرجع السابق.

(52) – انظر فى ذلك :

- Wikimedia,(11- 2013), Logic Diagram, [On-Line], Available: http//www.commons.wikimedia.org/wiki/ logic-diagram.

(53) Stanford, (10-2013), Propositional Logic, [On-Line] Available: http//www.infolab.stanford-edu/~ullman/ focs/ch12.pdf.

(54) ويلاحظ هنا أننا استخدمنا ثلاث دوائر , ولم نستخدم دائرتين كما اعتدنا في الصور السابقة؛ وتفسير ذلك أننا هنا بصدد ثلاث قضايا:(ق) ، و(ك) ، و(م) فكان من الأجـــدر الاســـتعانة بالشَّكل الدَّائري الثلاثي.