العلاقات الكائنة بين دوال الصدق البسيطة في حساب القضايا (قراءة تحليلية)

د. عابر محمد عبد العزيز(*)

مقدمة:

تتمثل دوال الصدق البسيطة – كما هي معالجة في المنطق الرمزي وبالتحديد في حساب القضايا– في: دالة التناقض Contradictory Function(~ ق)، ودالة العطف Conjunctive Function(ق . ك)، ودالة الانفصال Disjunctive Function (ق V ك)، ودالة اللزوم Implicative Function(ق ⟵ك) ، ودالة التكافؤ Equivalence Function(ق ≡ ك). وهذه الدوال _ كما هو مشار إليه في غالبية كتب المنطق_ ليست منفصلة عن بعضها البعض، ولكن تربطها مجموعة هائلة من العلاقات, بحيث يمكن قراءة أية دالة منها في ضوء الدوال الأخرى بكل سهولة. بمعنى آخر أن لكل دالة من هذه الدوال ما يكافئها من الدوال الأخرى، والكثير من هذه التكافؤات ينظر إليها على أنها تعريفات للدوال فيما بينها.[١]

والمقصود بالتعريف هنا هو النوع التحليلي من التعريف وليس النوع اللفظي، بمعنى أن يكون للشيء المعرف وتعريفه المعنى نفسه , ولكن مع اختلاف الصيغة الرمزية، وليس مجرد أن نضع رمزًا مكان رمز آخر مرادفًا له، وهذه التعريفات هي بالضرورة تكافؤات[٢]؛ لأن التعريف التحليلي بمعناه السابق يعنى أنه إذا كان المعرف صادقًا كان تعريفه صادقًا بالمثل ، وإذا كان كاذبًا كان تعريفه كاذبًا، أى أن المعرف وتعريفه يشتركان في قيمة الصدق , وهذا هو أساس التكافؤ.[٣]أو كما يشير ستراوس Strawson إلى أن التكافؤ هو عبارة عن صيغة تحليلية يكون أحد طرفيها تحليلاً للآخر من خلال حيازته قيم الصدق نفسها.[٤]

فالتكافؤ هو التكافؤ المادى أو المنطقى بمعنى أن العبارتين أو القضيتين لهما قيم الصدق نفسها سواء بالصدق أم بالكذب. فمثلا "نيوتن رجل" ، و" الشمس حارة" قضيتان متكافئتان ولهما قيمة الصدق نفسها , وهى قيمة

(*) مدرس المنطق وفلسفة العلوم – كلية الآداب – جامعة سوهاج.

(صادق) , وأيضًا " نيوتن ليس رجلا" ، و" الشمس باردة" متكافئتان , ولهما قيمة الصدق نفسها وهى قيمة (كاذب)[٥].

وأية دالة من هذه الدوال البسيطة يمكن الوصول إلى ما يكافئها من دوال أخرى من خلال عدة صور، فكما يشير بيسون Basson، وأوكونر O´Conner إلى أن أية دالة يمكن تعريفها إما من خلال قائمة الصدق الخاصة بها , وتحديد القالب الرقمي الذي يخصها , ومقارنته بقوالب رقمية أخرى، وإما من خلال ثوابت منطقية أخرى.[٦]

فالدالة اللزومية (ق ⟵ك) مثلا يمكن الوصول إلى ما يكافئها من الدوال الأخرى، وذلك من خلال وضع قائمة الصدق الخاصة بها والتى تتمثل في:

ق	ك		(ق ⟵ك)
١	١		١
١	٠		٠
٠	١		١
٠	٠		١

ثم تحديد قالبها الرقمي، والذي يتمثل فى(١٠١١)، ثم البحث عن القوالب الرقمية التي تتشابه وهذا القالب ، والذي منها _مثلاً_ القالب الرقمي الخاص بالدالة (~ ق V ك) , والذي يمكن تحديده من خلال قائمة الصدق الخاصة بهذه الدالة , والتى تتمثل فى الآتى:

ق	ك	~ ق		~ ق V ك
١	١	٠		١
١	٠	٠		٠
٠	١	١		١
٠	٠	١		١

وكما هو واضح فالقالب الرقمي الخاص بهذه الدالة يكمن فى (١٠١١) ، وبناء عليه يمكن القول أن ثمة تكافؤًا بين الدالة اللزومية (ق ←ك) , والدالة الانفصالية (~ ق V ك) , وأنه يمكن تعريف إحداهما في حدود الأخرى.[٧]

وهذه الصورة بطبيعة الحال تصل بنا إلى الصورة الثانية التي أشار إليها بيسون واوكونر، والتى يتم من خلالها تعريف أية دالة من خلال ثوابت منطقية أخرى.

وتختلف صور هذه التعريفات باختلاف الثوابت المنطقية , التي يتم اتخاذها بوصفها ثوابت أولية يمكن تقديم الثوابت الأخرى من خلالها[٨] . فهناك مثلا فريجه ولوكاسيفتش اختارا النفي واللزوم بوصفهما ثابتين أوليين , فجاءت صور تعريفاتهم على النحو التالي:

(ق . ك) = ~ (ق ← ~ك) ..... تعريف

(ق . ك) = ~ (ك ← ~ق) ..... تعريف

ق V ك = ~ ق ←ك ..... تعريف

ق V ك = ~ ك ←ق .... تعريف

ق ∆ ك = (ق ←ك) ← ~ (ك ←ق) .... تعريف

ق ∆ ك = ~ (ق ←~ك) ← ~ (~ ك ←ق) ..... تعريف

ق ≡ ك = ~ (ق ←ك) ← ~ (ك ←ق) .... تعريف

ق ≡ ك = ~ (ق ←~ك) ← ~ (~ ك ←ق) ..... تعريف

وهناك أيضًا رسل ووايتهد وهلبرت واكرمان اختاروا النفي والفصل , بوصفهما ثابتين أوليين لتقديم الثوابت الأخرى, فجاءت تعريفاتهم على النحو التالي:

(ق . ك) = ~ (~ ق v ~ ك) ..... تعريف

ق ∆ ك = ~ (ق . ك) v ~ (~ ق v ك) .... تعريف

ق ∆ ك = ~ [~ (~ ق v ~ ك) v ~ (قvك)] ... تعريف

ق ←ك = ~ ق V ك .... تعريف

ق ≡ ك = ~ [~ (ق v ~ ك) v ~ (~ ق v ك)] .. تعريف

ق ≡ ك = ~ (~ ق v ~ ك) v ~ (ق v ك)] ...... تعريف

وهناك أيضًا برنتانو وجونستون اللذين اختارا النفي والعطف , بوصفهما الثابتين الأوليين فجاءت التعريفات لديهم على النحو التالي:

ق V ك = ~ (~ ق . ~ ك) ..... تعريف

ق Δ ك = ~ (ق . ك) . ~ (~ ق . ~ ك) .... تعريف

ق ← ك = ~ (ق . ~ ك) .... تعريف

ق ≡ ك = ~ (ق . ~ ك) . ~ (~ ق . ك) ..... تعريف

ومثل هذه التعريفات يطلق عليها في المنطق التعريفات الرئيسة القائمة بين دوال الصدق البسيطة.

وإذا كان من أدق أهداف نظرية حساب القضايا- وفقًا لما يشير إليه ماهر عبد القادر فيما يتصل بدوال الصدق - تقديم العلاقات المنطقية بين الدوال وبعضها، وكذلك اهتمام النظرية ككل بوضع الدالات التي يمكن النظر إليها على أنها قضايا تحليلية[9] هذا بالإضافة إلى أهمية التعريفات في البرهان على قضايا ونظريات المنطق الرياضي، فإنه إذا وجدت أية صيغة مركبة في خطوات البرهان، يمكن استبدالها بصيغة أخرى أبسط منها , عن طريق هذه التعريفات، كأن نستبدل _مثلاً _صيغة الانفصال بصيغة التضمن, وهذا ما تمثله الصيغة الآتية:

(ق ≡ ك) = (ق ← ك) . (ك ← ق)[10]

------ = (~ ق v ك) . (~ ك v ق)

وكذلك يمكن استبدال دالة انفصالية بدالة عطفية(في مقدم دالة لزومية)، ونستبدل في تاليها دالة لزومية بأخرى عطفية وهذا ما تمثله الصيغة الآتية:

(ق ≡ ك) = ~(~ ق . ~ ك) ← (ك . ق)

------- = (ق V ك) ← ~ (ق ← ~ ك)

وهناك العديد من الاستبدالات والتكافؤات السليمة ، والتي سوف نعرضها بالتفصيل في موضع لاحق.

ومثل هذه الاستبدالات ربما تكون مفيدة- فيما يذكر البعض- من منطلق أنها تسمح لنا أحيانًا بالتخلص من العبارات المركبة المنفية ، والتي غالبًا ما يكون التعامل معها في البرهنة أمرًا في غاية الصعوبة.[11]

وهدفنا فى هذه الدراسة لا يكمن فحسب فى توضيح كافة أنماط العلاقات, التي يمكن أن تقوم بين هذه الدوال بكافة صورها، والتى يمكن التوصل إليها بسهولة- كما أشرنا آنفًا- من خلال قوائم الصدق والقوالب الرقمية، ولكننا نهدف فى المقام الأول إلى تحليل هذه العلاقات ومحاولة استنباط مجموعة من الأسس والمبادىء، التي يمكننا من خلالها معرفة كافة التعريفات والتكافؤات التي تخص دالة ما بعينها، دون اللجوء إلى قوائم الصدق.

بل وربما يمكننا من خلال هذه المبادىء المستنبطة معرفة مدى صحة التكافؤات، أو التثبت من صدق التكافؤات القائمة بين دوال الصدق البسيطة بدلاً من قوائم الصدق، والتي هي- فى غالب الأمر- بمثابة تعريفات متبادلة فيما بينها، كما يمكننا استخدامها فى الكشف عن صور للتكافؤات المركبة والتثبت من صحتها، وغير ذلك العديد من الأغراض المنطقية.

- أنماط العلاقات الكائنة بين دوال الصدق البسيطة:

سوف نحاول فى الصفحات القادمة التوصل إلى كافة أنماط العلاقات, التي يمكن أن تربط بين دوال الصدق البسيطة بعضها البعض، الأمر الذي يقتضى منا فى البداية وضع الدوال البسيطة بكافة الصور التي تظهر عليها[12]، والتي يمكن أن تتمثل فى الآتي:

- الدالة العطفية[13] والتي يمكن أن تظهر فى الصور الآتية:

١- (ق . ك) ونقيضها ~ (ق . ك) .

٢- (~ ق . ك) ونقيضها ~ (~ ق . ك).

٣- (ق . ~ ك) ونقيضها ~ (ق . ~ ك).

٤- (~ ق . ~ ك) ونقيضها ~ (~ ق . ~ ك).

- الدالة الانفصالية(بالمعنى الضعيف)[14] وتظهر في الصور الآتية:

١- (ق V ك) ونقيضها ~ (ق V ك) .

٢- (~ ق V ك) ونقيضها ~ (~ ق V ك) .

٣- (ق V ~ ك) ونقيضها ~ (ق V ~ ك) .

٤- (~ ق V ~ك) ونقيضها ~ (~ ق V ~ ك) .

- الدالة الانفصالية(بالمعنى القوى)[١٥] , وتأخذ الصور الآتية:

١- (ق Δ ك) ونقيضها ~ (ق Δ ك).

٢- (~ ق Δ ك) ونقيضها ~ (~ ق Δ ك).

٣- (ق Δ ~ ك) ونقيضها ~ (ق Δ ~ ك).

٤- (~ ق Δ ~ ك) ونقيضها ~ (~ ق Δ ~ ك).

- الدالة اللزومية[١٦] وتظهر في الصور الآتية:

١- (ق ← ك) ونقيضها ~ (ق ← ك).

٢- (~ ق ← ك) ونقيضها ~ (~ ق ← ك).

٣- (ق ← ~ ك) ونقيضها ~ (ق ← ~ ك).

٤- (~ ق ← ~ ك) ونقيضها ~ (~ ق ← ~ ك).

- الدالة التكافؤية[١٧] وتظهر فى الصور الآتية:

١- (ق ⇔ ك) ونقيضها ~ (ق ⇔ ك).

٢- (~ ق ⇔ ك) ونقيضها ~ (~ ق ⇔ ك) .

٣- (ق ⇔ ~ ك) ونقيضها ~ (ق ⇔ ~ ك) .

٤- (~ ق ⇔ ~ ك) ونقيضها ~ (~ ق ⇔ ~ ك) .

ونحاول الآن أن نضع القالب الرقمي الخاص بكل صورة من هذه الصور، بالإضافة إلى نقائضها، وذلك وفقًا لمعايير الصدق والكذب فى هذه الدوال[١٨] وهو ما يكمن فى :

(ق . ك) قالبها الرقمى (١٠٠٠)، وقالب نقيضها (٠١١١)

(~ ق . ك) قالبها الرقمى (٠٠١٠)، وقالب نقيضها (١١٠١)

(ق . ~ ك) قالبها الرقمى (٠١٠٠)، وقالب نقيضها (١٠١١)

(~ ق . ~ك) قالبها الرقمى (٠٠٠١)، وقالب نقيضها (١١١٠)

(ق V ك) قالبها الرقمى (١١١٠)، وقالب نقيضها (٠٠٠١)

(~ ق V ك) قالبها الرقمى (١٠١١)، وقالب نقيضها (٠١٠٠)

(ق V ~ ك) قالبها الرقمى (١١٠١)، وقالب نقيضها (٠٠١٠)

(~ ق V ~ك) قالبها الرقمى (٠١١١)، وقالب نقيضها (١٠٠٠)

(ق ← ك) قالبها الرقمى (١٠١١)، وقالب نقيضها (٠١٠٠)

(~ ق ← ك) قالبها الرقمى (١١١٠)، وقالب نقيضها (٠٠٠١)

(ق ← ~ ك) قالبها الرقمى (٠١١١)، وقالب نقيضها (١٠٠٠)
(~ ق ← ~ك) قالبها الرقمى (١١٠١)، وقالب نقيضها (٠٠١٠)
(ق Δ ك) قالبها الرقمى (٠١١٠)، وقالب نقيضها (١٠٠١)
(~ ق Δ ك) قالبها الرقمي (١٠٠١)، وقالب نقيضها (٠١١٠)
(ق Δ ~ ك) قالبها الرقمى (١٠٠١)،وقالب نقيضها (٠١١٠)
(~ ق Δ ~ك) قالبها الرقمى(٠١١٠)، وقالب نقيضها (١٠٠١)
(ق ⇔ ك) قالبها الرقمى(١٠٠١)، وقالب نقيضها (٠١١٠)
(~ ق ⇔ ك) قالبها الرقمى(٠١١٠)، وقالب نقيضها (١٠٠١)
(ق ⇔ ~ ك) قالبها الرقمى(٠١١٠)، وقالب نقيضها (١٠٠١)
(~ ق ⇔ ~ك) قالبها الرقمى (١٠٠١)، وقالب نقيضها (٠١١٠)

ومن خلال هذه القوالب الرقمية يمكننا أن نصل إلى مجموعة كبيرة من التعريفات والتكافؤات كما ذكرنا آنفًا.

وكما وضح أوكونر أن أية دالتين تمتلكان القالب الرقمى نفسه , تكونان متكافئتين وقابلتين لإحلال إحداهما محل الأخرى فى الأغراض المنطقية [١٩] , وعليه وبعد النظر فى القوالب السابقة , يمكن التوصل إلى سلسلة[٢٠] التكافؤات الآتية:

١- (ق . ك) ≡ ~(~ق ∨ ~ ك) ≡ ~ (ق ← ~ ك)
٢- (~ ق . ك) ≡ ~(ق ∨ ~ ك) ≡ ~(~ق ← ~ك)
٣- (ق . ~ك) ≡ ~(~ ق ∨ ك) ≡ ~(ق ← ك)
٤- (~ ق . ~ك) ≡ ~ (ق ∨ ك) ≡ ~(~ ق ← ك)
٥- (ق ∨ ك) ≡ ~(~ق . ~ ك) ≡ (~ ق ← ك)
٦- (~ ق ∨ ك) ≡ ~(ق . ~ ك) ≡ (ق ← ك)
٧- (ق ∨ ~ ك) ≡ ~(~ ق . ك) ≡ (~ ق ← ~ك)
٨- (~ ق ∨ ~ ك) ≡ ~(ق . ك) ≡ (ق ← ~ ك)
٩- (ق Δ ك) ≡ ~(~ ق Δ ك) ≡ ~(ق Δ ~ ك)
≡ (~ق Δ ~ك) ≡ ~ (ق ⇔ ك) ≡ (~ ق ⇔ ك)
≡ (ق ⇔ ~ ك) ≡ ~(~ق ⇔ ~ ك)
١٠- (~ ق Δ ك) ≡ ~(ق Δ ك) ≡ (ق Δ ~ ك)

≡ ~(~ ق Δ ~ك) ≡ (ق ⇔ ك)   ≡ ~(~ ق ⇔ ك)

≡ ~(ق ⇔ ~ ك) ≡ (~ ق ⇔ ~ك)

وجدير بالذكر أن مثل هذه التكافؤات قد تمت الإشارة إليها بوضوح في البرنكبيا , مع توضيح كيف يمكن أن يشتق بعضها من البعض الآخر.[٢١] وهى تتضمن صورًا لقواعد وقوانين منطقية متعارف عليها.

والباحث من جانبه يحاول إعادة قراءة هذه التكافؤات وتحليلها جيدًا ؛ بهدف الوصول إلى أسس ومبادىء يمكن أن تحكم مثل هذه التكافؤات بين دوال الصدق البسيطة بعضها البعض، والتى يمكن إيضاحها من خلال الآتى:

<u>أولاً: التكافؤ بين العطف والانفصال:</u>

لكي نحصل على تكافؤ سليم بين الدالة العطفية والدالة الانفصالية، أو نصل إلى تعريف للدالة العطفية فى حدود الدالة الانفصالية والعكس، فلابد من إتباع الخطوات الآتية:

- تغيير حالة صدق الدالة (موضع التكافؤ أو التعريف) من الصدق إلى الكذب والعكس.
- تغيير حالة صدق كافة مكونات الدالة موضع التكافؤ أو التعريف (البدائل فى الانفصالية والحجج فى العطفية) من الصدق إلى الكذب والعكس.

وشرح هذه الخطوات يكمن فى الآتي:

إننا ننظر إلى إحدى الدالتين(العطفية أو الانفصالية) بوصفها طرفًا للتكافؤ، أو بوصفها معرفًا- مهما كانت الصورة التي كانت عليها الدالة- ثم نقوم بتغيير حالة صدقها من الإثبات إلى النفي والعكس ، ويتم تطبيق ذلك التغيير على مرحلتين: على الدالة بشكل كلى، وكذلك على كل مكون من مكوناتها على حدة.

فعلى سبيل المثال لو كانت لدينا الدالة العطفية البسيطة التالية(ق . ك), وأردنا أن نعرف الدالة الانفصالية التي تكافئها فسوف نمر بالخطوات التالية:

- (ق . ك) ≡ ~(ق ∨ ك)..................................(١)
- (ق . ك) ≡ ~(~ ق ∨ ~ ك)...........................(٢)

حيث قمنا فى الخطوة الأولى بتغيير حالة الدالة ككل , من حالة الإثبات إلى حالة النفي فى الطرف الآخر، والذي تحول ثابته بطبيعة الحال إلى ثابت الانفصال . وفى الخطوة الثانية قمنا بتغيير حالة صدق كافة مكونات الطرف الأول_ المتغيران"ق"، "ك " _ من حالة الإثبات إلى حالة النفي ("~ ق"، "~ ك") فى الطرف الثاني؛ فكان لدينا تكافؤ بين الدالة العطفيــة والدالــة الانفصالية، أو إننا حصلنا على تعريف للدالة العطفيــة فــى حــدود الدالــة الانفصالية.

وكذلك الحال لو بدأنا بالدالة الانفصالية، فلو كانت لدينا دالة انفــصالية من قبيل (ق ∨ ~ك) , وأردنا أن نعرف الدالة العطفيــة التــي تكافئهــا , فسوف نمر بالخطوات السابقة نفسها على النحو التالي:

- (ق ∨ ~ ك) ≡ ~(ق . ~ ك)..............................(١)
- (ق ∨ ~ ك) ≡ ~(~ ق . ك)..............................(٢)

وهنا قمنا بتغيير حالة صدق الدالة ككل من الإثبات إلى النفي ، ثم قمنا بتغيير حالة صدق مكوناتها فحولنا (ق) إلى (~ ق) , وحولنا (~ ك) فى الطرف الأول للتكافؤ أو التعريف إلى(ك) فى الطرف الثاني؛ فحصلنا علــى الشكل الأخير (٢) والذي يمثل تكافؤًا بين الدالة الانفصالية والدالة العطفية , أو تعريف للانفصال فى حدود العطف.

وهكذا نستطيع تعريف الدالة العطفية مهما كانت صورتها فى حدود الدالة الانفصالية والعكس ، وذلك بعد تطبيق الخطوات السابقة, والتى يمكن أن نسميها- إن جاز لنا التعبير- بمبدأ النفي الموحد؛ وذلك من منطلق أننا نقوم بإدخال عنصر النفي على كافة أطراف الدالة التي نريــد معرفــة مــا يكافئها , سواء أكانت الدالة عطفية أم انفصالية.

ولنا هنا ملاحظة على هذه الخطوات وذلك المبدأ , وهى أن العطــف والانفصال فى التكافؤ لا يجتمعان على نفى ولا على إثبات, أى لابد من كون أحدهما مثبتًا والآخر منفيًّا.

ثانياً: التكافؤ بين العطف واللزوم:

أما عن الأسس التي يمكن أن تحكم التكافؤ بين الدالة العطفية والدالة اللزومية والعكس ، أو التي يمكن من خلالها تعريف إحداهما في حدود الأخرى، فيمكن صياغتها من خلال الخطوات الآتية:

- تغيير حالة صدق الدالة (موضع التكافؤ أو التعريف) , من الصدق إلى الكذب والعكس.
- تغيير حالة صدق المتغير الثاني (الحجة الثانية فى حالة العطف، والتالي في حالة اللزوم) من الإثبات إلى النفي والعكس.
- الإبقاء على حالة صدق المتغير الأول(الحجة الأولى في حالة العطف والمقدم فى حالة اللزوم) كما هي صدقًا وكذبًا.

وشرح هذه الخطوات يكمن فى التالي:

إننا في هذه الحالة من التكافؤ نقوم بالخطوة الأولى نفسها التى اتبعناها فى المبدأ الخاص بالتكافؤ بين العطف والانفصال- سالف الذكر- بأن نغير حالة صدق الدالة ككل , من الإثبات إلى النفي أو العكس ، وفى الخطوة الثانية نقوم بتغيير حالة الحجة الثانية أو(التالي) من الإثبات إلى النفي والعكس، مع الإبقاء على حالة صدق المكون الأول في كلتا الدالتين كما هي

فعلى سبيل المثال لو كانت لدينا دالة لزومية من قبيل (ق ⟵ ~ ك) , وأردنا أن نعرف صورة الدالة العطفية التي تكافئها، فيمكن أن يتضح ذلك من خلال الخطوات الآتية:

- (ق ⟵ ~ ك) ≡ ~(ق . ~ ك).......................(١)
- (ق ⟵ ~ ك) ≡ ~(ق . ك) ....(٢)

و قمنا هنا بتغيير حالة صدق الدالة اللزومية ككل , من الإثبات إلى النفي بعد تغيير ثابت اللزوم بثابت العطف , في الطرف الثاني للتكافؤ كما فى الخطوة الأولى , ثم قمنا بتغير حالة صدق التالي في الدالة اللزومية (~ ك) , من حالة النفي التي عليها إلى حالة الإثبات(ك) وأبقينا على حالة صدق المقدم (ق) كما هو واضح فى الخطوة الثانية.

وهكذا الحال لو أننا بدأنا بالدالة العطفية، فلو كانت لدينا دالة عطفية من قبيل(~ ق . ~ ك) وأردنا أن نعرف الدالة اللزومية التى تكافئها، أو كيفية تعريفها فى حدود اللزوم فسوف نمر بالخطوات الآتية:

- **(~ ق . ~ ك) ≡ ~(~ ق ← ~ ك).................(١)**
- **(~ ق . ~ ك) ≡ ~(~ ق ← ك).....................(٢)**

ثالثًا: التكافؤ بين الانفصال واللزوم:

للوصول إلى تكافؤ سليم ومتبادل بين الدالة الانفصالية والدالة اللزومية، أو تعريف إحداهما فى حدود الأخرى نتبع الخطوات الآتية:

- **الإبقاء على حالة صدق الدالة (موضع التعريف أو التكافؤ) كما هي إثباتًا ونفيًا.**
- **تغيير حالة صدق المتغير الأول(المقدم فى الدالة اللزومية، والبديل الأول فى الدالة الانفصالية) من الإثبات إلى النفي والعكس.**
- **الإبقاء على حالة صدق المتغير الثاني (التالي فى اللزوم، والبديل الثاني فى الانفصال) كما هي إثباتا ونفيًا.**

وشرح هذه الخطوات يكمن فى الآتي:

إننا نقوم بالإبقاء على حالة صدق الدالة المراد تعريفها , كما هي بعد تحويلها من الانفصال إلى اللزوم أو العكس، عدا حالة صدق المتغير الأول فنقوم بتغييرها إلى النقيض، فلو كانت لدينا دالة انفصالية مثلا من قبيل (~ ق ∨ ~ ك) , وأردنا أن نعرف صورة الدالة اللزومية التي تكافئها، أو كيف لنا أن نعرف الانفصال فى حدود اللزوم فنقوم بالخطوات الآتية:

- **(~ ق ∨ ~ ك) ≡ (~ ق ← ~ ك)................(١)**
- **(~ ق ∨ ~ ك) ≡ (ق ← ~ ك)....................(٢)**

وهنا قمنا في الخطوة الأولى بالإبقاء على حالة صدق الدالة الانفصالية كما هي (الإثبات), بعد تغيير ثابت الانفصال إلى ثابت اللزوم ، وفى الخطوة الثانية قمنا بتغيير حالة البديل الأول(~ ق) , من حالة النفي إلى حالة الإثبات(ق) , وأبقينا على حالة صدق البديل الثاني (~ ك) , كما هي في الطرف الثاني كما هو موضح في الخطوة(٢).

وبالطبع فإننا سوف نتبع الخطوات نفسها لو بدأنا بدالة لزومية , وأردنا أن نعرف الصورة الانفصالية التي تكافئها، فمثلاً لو كانت لدينا دالة لزومية من قبيل(~ ق ← ك) , فإننا نصل إلى ما يكافئها من انفصال من خلال الآتى:

- (~ ق ← ك) ≡ (~ ق ∨ ك).......................(١)
- (~ق ← ك) ≡ (ق ∨ ك)..........................(٢)
-

رابعًا : التكافؤ بين التكافؤ والانفصال القوى:

للانفصال في حساب القضايا – كما هو معلوم– صورتان: تسمى إحداهما بالانفصال الضعيف أو غير الحقيقى[22] – وهو ما كنا نتعامل معه في المبادىء السابقة– والذي يمكن من خلاله الجمع بين البديلين في الوقت ذاته , دون الإخلال بمعنى الانفصال، أما الصورة الثانية فتسمى بالانفصال القوى أو الانفصال الحقيقى – وهو ما سوف نتعامل معه من خلال هذه القاعدة– والذي لا يمكن من خلاله الجمع بين البديلين في الوقت نفسه.

وهذه الصورة من الانفصال تتكافىء مع صورة الدالة التكافؤية والعكس، وذلك وفقًا لأسس معينة يمكن صياغتها في الخطوة التالية:

- تغيير حالة صدق مستوى واحد[23] فقط من مستويات صدق الدالة (إما الدالة ككل ، وإما تغيير حالة صدق المتغير الأول ، وإما تغيير حالة صدق المتغير الثاني) والإبقاء على حالة صدق المستويين المتبقيين كما هما.

وشرح هذه الخطوة يكمن في :

إذا كانت لدينا دالة انفصالية بمعناها القوى ، وأردنا أن نعرف صورة الدالة التكافؤية التي تتكافىء معها , والتي يمكن تعريفها من خلالها. فنحن أمام خيارات ثلاثة: وكل واحد منها ينتج لنا صورة تكافؤية سليمة ، فإما أن نغير حالة صدق الدالة ككل،وإما أن نغير حالة صدق أحد مكوناتها، فلو كانت لدينا دالة انفصالية قوية من قبيل (ق Δ ~ ك) فيمكننا أن نصل إلى ما يكافئها من خلال الآتي:

- (ق Δ ~ ك) ≡ (ق ⟺ ~ ك)....................(١)

- (ق Δ ~ ك) ≡ ~ (ق ⇔ ~ ك)...............(٢)
- (ق Δ ~ ك) ≡ (~ ق ⇔ ~ ك)................(٣)
- (ق Δ ~ ك) ≡ (ق ⇔ ك).......................(٤)

ففي الحالة الأولى قمنا بتغيير حالة صدق الدالة الانفصالية , بشكل كلى من الإثبات إلى النفي، وأبقينا على حالة صدق المكونات كما هى ، وهو ما يتمثل فى الخطوة (٢) , وهى بمثابة صورة صحيحة للتكافؤ بين الدالة الانفصالية بمعناها القوى و الدالة التكافؤية.

أما في الحالة الثانية فقمنا بتغيير حالة صدق المتغير الأول (ق) من حالة الإثبات إلى حالة النفي (~ ق) فى الطرف الثانى , وتركنا حالة صدق المتغير الثانى وحالة صدق الدالة ككل كما هى، وهو ما تمثلة الخطوة (٣) , وهى أيضًا بمثابة صورة صحيحة للتكافؤ بين الانفصال بمعناه القوى والدالة التكافؤية.

أما في الخطوة الثالثة فقمنا بتغيير حالة المتغير الثاني فقط ,من حالة النفي (~ ك) إلى حالة الإثبات (ك) في الطرف الثاني، وتركنا حالة صدق المتغير الأول , وحالة صدق الدالة ككل كما هى ، وهو ما تمثله الخطوة(٤) , وهو أيضًا تكافؤ سليم.

وهكذا الحال لو بدأنا بدالة تكافؤية , وأردنا أن نعرف ما يكافئها من صور الدالة الانفصالية بمعناها القوى ، فلو كانت لدينا _مثلا_ دالة تكافئية من قبيل(~ ق ⇔ ك) , فإننا سوف نصل إلى ما يكافئها من انفصال قوى من خلال الآتى:

- (~ ق ⇔ ك) ≡ (~ ق Δ ك)............(١)
- (~ ق ⇔ ك) ≡ ~ (~ ق Δ ك)..........(٢)
- (~ ق ⇔ ك) ≡ (ق Δ ك)................(٣)
- (~ ق ⇔ ك) ≡ (~ ق Δ ~ ك)..........(٤)

ونستنتج من ذلك : أن أية صورة من صور الدالة التكافؤية, لها ثلاث صور تكافئها من صور الدالة الانفصالية , بمعناها الاستبعادى والعكس صحيح.

خامسًا: التكافؤ بين الانفصال القوى مع ذاته:

وهو نوع من التكافؤ يكون بين الدوال الانفصالية بمعناها القوى بعضها البعض،أى أن الدالة الانفصالية بمعناها القوى , يمكن أن تتكافىء مع ذاتها , على الرغم من اختلاف بعض حالات صدق مكوناتها[٢٤] , ومثل هذا التكافؤ يحكمه أيضًا مبدأ محدد يمكن صياغته فى الخطوة الآتية :

- يتم تغيير حالة صدق مستويين من مستويات الدالة(الدالة ككل، والبديل الأول، والبديل الثاني) , والإبقاء على حالة صدق المستوى الباقى كما هى.

وشرح هذه الخطوة يكمن فى الآتى:

إذا كانت لدينا دالة انفصالية قوية من قبيل (ق Δ ك) , وأردنا أن نعرف الصور الأخرى من الدوال الانفصالية القوية , التى تتكافىء معها فيكون ذلك من خلال الخطوات التالية:

- (ق Δ ك) ≡ (ق Δ ك)..................(١)
- (ق Δ ك) ≡ (~ ق Δ ~ ك)..........(٢)
- (ق Δ ك) ≡ ~ (ق Δ ~ ك)..............(٣)
- (ق Δ ك) ≡ ~ (~ ق Δ ك)............(٤)

ومن خلال هذه الخطوات يتضح لنا أن صاحب التكافؤ هنا , له حرية الاختيار فى تغيير حالة صدق مستويين من مستويات الدالة , والإبقاء على حالة صدق المستوى الثالث كما هو موضح في الخطوة (٢) مثلاً تم تغيير حالة صدق البديلين , وترك حالة صدق الدالة ككل كما هى ، وفى الخطوة (٣) تم تغيير حالة صدق الدالة ككل من الإثبات إلى النفي , وكذلك حالة صدق البديل الثانى، أما فى الخطوة الأخيرة فتم تغيير حالة صدق البديل الأول, بالإضافة إلى تغيير حالة صدق الدالة ككل , والإبقاء على حالة صدق البديل الثانى, وعليه فالخطوات (٢)، (٣)، (٤) كلها صور تكافؤية سليمة.

سادسا: التكافؤ بين التكافؤ وذاته:

من خلال هذه القاعدة يمكن تعريف تكافؤ فى حدود تكافؤ آخر مع اختلاف مكوناتهما ، والمبدأ الذى يحكم ذلك يكمن في الخطوة الآتية:

- تغيير حالة صدق مستويين من مستويات الدالة الثلاثة :(الدالة ككل ، وطرف التكافؤ الأول، أو طرف التكافؤ الثاني) والإبقـاء على حالة صدق المستوى الثالث كما هى.

وهذا المبدأ _كما هو واضح _هو المبدأ السابق نفسه, الذى يحكم التكافؤ بين الانفصال القوى وبعضه البعض ، فلو كانت لدينا دالة تكافؤية من قبيـل (~ ق ⇔ ك) , وأردنا أن نعرف صور الدالة التكافؤية التـى تتكـافىء معها نقوم بإتباع الخطوات التالية:

- (~ق ⇔ ك) ≡ (~ ق ⇔ ك) ....(١)
- (~ ق ⇔ ك) ≡ (ق ⇔ ~ ك) ....(٢)
- (~ ق ⇔ ك) ≡ ~(~ ق ⇔ ~ ك) ....(٣)
- (~ ق ⇔ ك) ≡ ~(ق ⇔ ك) ....(٤)

والتي يتضح من خلالها أن (٢)، (٣) ،(٤) كلها صور تكافؤية سليمة.

هذا، ويجدر بنا أن نشير إلى أن ثمة صورًا أخرى من التكافؤ فى الـدوال البسيطة , ولكن هذه المرة يكون التكافؤ بين الدالة وذاتهـا , بعـد تبـديل مواضع مكوناتها، وهو ما يعرف فى المنطق باسم قوانين التبـديل , فمـثلاً ثمة تكافؤ للدالة العطفية مع ذاتها , ويأخذ الصورة التالية:

- (ق . ك) ≡ (ك . ق)

وهناك أيضًا تكافؤ للدالة الانفصالية مع ذاتها، والذي يظهر فى الصورة:

- (ق v ك) ≡ (ك v ق)[٢٥]

ويمكن استنتاج المبدأ الذى يحكم مثل هذا النمط من التكافؤ، والـذى يمكـن صياغته فى الآتي:

- إن مكونات الدالة المعرفة، أو التى تكون موضع تكافؤ , تظل قـيم صدقها كما هى، مع تبديل مواضعها فى الطرف الثانى للتكافؤ .

وبناءً عليه يمكن معرفة كافة التكافؤات التى تكون عليها الدوال البسيطة , كل واحدة مع ذاتها والتى يمكن حصرها فى الآتى:

- (ق . ك) ≡ (ك . ق)
- (~ ق . ك) ≡ (ك . ~ ق)

- (ق . ~ ك) ≡ (~ ك . ق)
- (~ ق . ~ ك) ≡ (~ك . ~ ق)
- (ق v ك) ≡ (ك v ق)
- (~ ق v ك) ≡ (ك v ~ ق)
- (ق v ~ ك) ≡ (~ ك v ق)
- (~ ق v ~ ك) ≡ (~ ك v ~ ق)
- (ق Δ ك) ≡ (ك Δ ق)
- (~ ق Δ ك) ≡ (ك Δ ~ ق)
- (ق Δ ~ ك) ≡ (~ ك Δ ق)
- (~ ق Δ ~ ك) ≡ (~ ك Δ ~ ق)
- (ق ⇔ ك) ≡ (ك ⇔ ق)
- (~ ق ⇔ ك) ≡ (ك ⇔ ~ ق)
- (ق ⇔ ~ ك) ≡ (~ ك ⇔ ق)
- (~ ق ⇔ ~ ك) ≡ (~ ك ⇔ ~ ق)

ويلاحظ من خلال الصور السابقة , أننا لم ندرج بها الدالة اللزومية والصور الخاصة بها، حيث إن لتكافؤ الدالة اللزومية مع ذاتها مبدأ مغايرًا يمكن صياغته فى الآتي:

- **تغيير حالة صدق مكونات الدالة اللزومية مع تبديل مواضعها.**

بمعنى أن المقدم المثبت مثلاً يتم تحويله إلى تالي منفى, فى الطرف الثانى للتكافؤ، وبناءً عليه يمكن وضع الصور التكافؤية التى تظهر فيها الدالة اللزومية مع ذاتها من خلال الآتي:

- (ق ← ك) ≡ (~ ك ← ~ ق)
- (~ ق ← ك) ≡ (~ ك ← ق)
- (ق ← ~ ك) ≡ (ك ← ~ ق)
- (~ ق ← ~ ك) ≡ (ك ← ق)

ونلاحظ هنا- بشكل عام- أن الطرف الثانى فى مثل هذه التكافؤات صور جديدة , يمكن أن تضاف لقائمة التكافؤات لكل دالة فيما يخصها.

فيشير دكتور مهران إلى أن الدالة($\text{ق} \rightarrow \text{ك}$) تتكافىء والدالة ($\sim \text{ك} \rightarrow \sim \text{ق}$) والدالة الأخيرة يمكن أن تضاف إلى سلسلة التكافؤات الخاصة بالدالة الأولى والتى تتمثل فى:[٢٦]

- $(\text{ق} \rightarrow \text{ك}) \equiv \sim (\text{ق} \;.\; \sim \text{ك})$
- ------ $\equiv \sim \text{ق} \vee \text{ك}$
- ----- $\equiv (\sim \text{ك} \rightarrow \sim \text{ق})$

ولعل مثل هذه النوعية من التكافؤات تلقى بظلالها على المبادىء والأسس الخاصة بالتكافؤات , بين الدوال البسيطة بعضها البعض، والتى عالجناها سابقًا، ولكن هب أن سائلاً طرح تساؤلاً مفاده : لو أن تكافؤًا جمع بين دالتين بسيطتين مختلفتين , وكانت مكونات إحداهما متبادلة مع الأخرى ، فهل يتم الاحتكام فى هذا التكافؤ إلى المبادىء نفسها الخاصة بهاتين الدالتين؟.

وقبل الإجابة عن مثل هذا التساؤل , نحاول أن نقدم مثالاً ربما يوضح الأمر بعض الشىء, فلو كان لدينا مثلاً تكافؤان من قبيل :

- $(\text{ق} \;.\; \text{ك}) \equiv \sim (\sim \text{ك} \vee \sim \text{ق})$
- $\sim (\sim \text{ق} \vee \sim \text{ك}) \equiv (\text{ك} \;.\; \text{ق})$

فهل يحكمهما المبدأ نفسه الذى يحكم التكافؤ بين العطف والانفصال؟ .

والإجابة هنا نعم مع تغيير مواضعهما فحسب، والدليل على ذلك كما أشرنا آنفًا أن الدوال العطفية والانفصالية والتكافؤية , تتكافىء مع ذواتها دون أن تغير حالة صدق مكوناتها ، وما يتغير فقط هو مواضع هذه المكونات, بمعنى أن البديل الأول فى الانفصالية , يصبح حجة ثانية فى الدالة العطفية, والحجة الأولى فى العطفية تصير بديلاً ثانيًا فى المنفصلة.

وهذا بطبيعة الحال ينطبق على كافة صور الدالة العطفية , فى تكافئها مع كافة صور الدالة الانفصالية والعكس.

وجدير بالذكر أن هذه المبادىء إذا كانت تحكم التكافؤات بين دوال الصدق البسيطة , فهي من الممكن أيضًا أن تحكم التكافؤ بين الدوال المركبة , فعلى سبيل المثال لو كانت لدينا دالة مركبة من قبيل:

- $[\sim \text{ق} \vee (\text{م} \rightarrow \text{ر})]$.

وأردنا أن نعرف ما يكافئها من دوال أخرى , فسوف نجد أن الدالة هنـــا دالة انفصالية , البديل الأول فيها هو (~ ق) , أما البديل الثانى فهو عبارة عن دالة لزومية (م ← ن) , وعليه يمكن التوصل إلى التكافؤ الآتي:

- [~ ق ∨ (م ← ن)] ≡ [ق ← (م ← ن)].

وهناك أيضًا صورة أخرى تكمن فى:

- [~ ق ∨ (م ← ن)] ≡ [~ (م ← ن) ← ~ ق].

وذلك بعد تطبيق المبدأ الخاص بالتكافؤ بين الانفصال واللــزوم، ونجــد أيضًا :

- [~ ق ∨ (م ← ن)] ≡ ~ [ق . ~ (م ← ن)]

وهناك أيضًا صورة أخرى تكمن فى الآتي:

- [~ ق ∨ (م ← ن)] ≡ ~ [~ (م ← ن) . ق]

وذلك بعد تطبيق مبدأ التكافؤ الذى بين الدالة الانفصالية والدالة العطفية .

وبشكل متماثل أشار الدكتور مهران فى تحليله لبعض الدوال بناء على قانوني دى مورجان إلى إنه يمكننا تطبيق قواعد دى مورجان علـــى دالـــة انفصالية منفية بديلها الأول (ق) وبديلها الثانى (ك v ل) والتى تكون على الصورة ق v (ك v ل) ونصل من خلال هــذا التطبيــق إلـــى الصورة ~ ق . ~ (ك v ل) والتى تكون متكافئة معها .[٢٧]

وهنا تم تطبيق قاعدة التكافؤ التى تربط بين الــدوال الانفــصالية والــدوال العطفية.

- التكافؤ والدوال والمركبة

هناك نمط آخر من التكافؤ، وهذه المرة بين الدالة التكافؤية , وأية دالـــة مركبة أخرى سواء أكان هذا التركيب قضايا متماثلة أم قــضايا مختلفـــة، أو بمعنى آخر صور تعريف الدالة التكافؤية بدوال مركبة، ويمكن تقــسيم هــذا النمط , وفقــًا لطبيعة الدالة المركبة إلى الآتى:

١- التكافؤ والدالة العطفية المركبة

وهو التكافؤ القائم بين الدالة التكافؤية , والدالة العطفية المركبة , مهمــا كانت طبيعة المكونات التى تتركب منها، وهو ما يعرف فى بعض الأحـــايين بأنه تعريف التكافؤ بالعطف، وهو ما يمكن أن تمثله صور تكافؤية من قبيل:

- ق ⟺ ك ≡ ~(ق . ~ك) . ~(~ق . ك)
- ------- ≡ ~(~ق . ك) . (~ك ← ~ق)

ونحن نسعى كعادتنا لتحليل مثل هذه الصور التكافؤية , فى محاولة لوضع أسس أو مبادىء معينة , يمكننا من خلالها التوصل إلى مثل هذه الصور وغيرها ، بل والكشف عن صحة بعضها في بعض الأحايين.

وهناك بالفعل مجموعة من المبادىء , يمكن أن تحكم هذا النمط التكافؤى والتى يمكن صياغتها فى الآتى:

- إذا كانت إحدى مكونات التركيب العطفى دالة وصل , فلابد أن تكون الدالة ككل منفية ، مع نفى إحدى حجتيها.
- إذا كانت إحدى مكونات التركيب العطفى دالة انفصالية, فلابد أن يكون أحد البديلين فقط منفيًا .
- إذا كانت إحدى مكونات التركيب العطفى دالة لزومية , فلابد أن يكون مقدمها وتاليها إما مثبتين معًا وإما منفيين معًا.

ومن خلال تطبيق هذه المبادىء الثلاثة , يمكن التوصل بسهولة إلى كافة التراكيب العطفية التى تتكافىء والدالة المتكافئة ،أو يمكن تعريف التكافؤ عن طريقها.

هذا ويمكن حصر مثل هذه الصور التكافؤية فى الآتى:

- ق ⟺ ك ≡ ~(ق . ~ك) . ~(~ق . ك)
- ≡ ~(ق .~ ك) . ~(ك .~ ق)
- ≡ ~(ق . ~ك) . (ق V ~ك)
- ≡ ~(ق .~ ك) . (~ق ← ~ك)
- ≡ ~(ق . ~ك) . (~ك V ق)
- ≡ ~(ق . ~ك) . (ك ← ق)
- ≡ ~(~ق . ك) . (~ق V ك)
- ≡ ~(~ق . ك) . (ق ← ك)
- ≡ ~(~ق . ك) . ~(~ك . ق)
- ≡ ~(~ق . ك) . (ك V ~ق)
- ≡ ~(~ق . ك) . (~ك ← ~ق)

- (ك ~ V ق) . (ك V ق ~) ≡
- (ك ~ ← ق ~) . (ك V ق ~) ≡
- (ق V ك ~) . (ك V ق ~) ≡
- (ق ← ك) . (ك V ق ~) ≡
- (ك ← ق) . (ك ~ V ق) ≡
- (ق . ك ~) ~ . (ك ~ V ق) ≡
- (ق ~ V ك) . (ك ~ V ق) ≡
- (ق ~ ← ك ~) . (ك ~ V ق) ≡
- (ك ~ ← ق ~) . (ك ← ق) ≡
- (ق ~ . ك) ~ . (ك ← ق) ≡
- (ق V ك ~) . (ك ← ق) ≡
- [28](ق ← ك) . (ك ← ق) ≡
- (ق . ك ~) ~ . (ك ~ ← ق ~) ≡
- (ق ~ V ك) . (ك ~ ← ق ~) ≡
- (ق ~ ← ك ~) . (ك ~ ← ق ~) ≡

ولنا هنا على هذه الصور التكافؤية ملاحظة أساسية يمكن صياغتها فى الآتي:

يكفى أن نعرف صورة واحدة من صور الدالة العطفية المركبة , التي يمكن تعريفها فى حدود التكافؤ , لنستنتج منها بقية الصور الأخرى، وذلك بتطبيق قواعد التكافؤ, والتعريف بين الدوال البسيطة فيما بينها، فلو كانت لدينا دالة تكافؤية أو تعريف مركب بالشكل الآتى:

- (ق . ك ~) ~ . (ك ~ V ق) = ك ≡ ق

فيمكن على وجه الفور أن نستخرج منها صورة أخرى على النحو التالي:

- (ق ~ V ك) . (ك . ق ~) ~ = ك ≡ ق

وهنا استبدلنا العطف بما يكافئه من الانفصال , وهكذا بحيث يمكن استنباط كافة الصور الأخرى المشار إليها آنفًا.

وإلى الفكرة نفسها أشار الدكتور ماهر عبد القادر حينما ذهب إلى أن تعريف التكافؤ باستخدام التضمن والوصل وهو ما تمثله الصورة :

• ق ⇔ ك ≡ (ق ←ك) . (ك← ق)

يمكن التعبير عنه بصورة أخرى إذ إن الصيغة (ق ←ك) , تساوى الصيغة (~ ق V ك) والصيغة (ك← ق) تساوى الصيغة (~ ك V ق)، وبالتالى يمكن استبدال الطرف الأيمن بالصيغة (~ ق V ك) . (~ ك V ق) , فيكون التكافؤ فى صورته النهائية على الشكل:[٢٩]

ق ⇔ ك ≡ (~ ق V ك) . (~ ك V ق)

٣- التكافؤ والدالة الانفصالية المركبة:

وهو التكافؤ بين الدالة التكافؤية والدالة الانفصالية المركبة _مهما كان تركيبها_ , أو كما يشار تعريف التكافؤ فى حدود الانفصال , وهو ما يمكن التوصل إليه من خلال المبادىء الآتية:

- إذا كانت إحدى بدائل الانفصال المركب دالة وصل , فلابد لحجتيها فقط أن يكونا إما مثبتتين وإما منفيتين.
- إذا كانت إحدى البدائل دالة لزومية فلابد أن تكون الدالة وإحدى مكوناتها(المقدم أو التالى) منفية.
- إذا كان إحدى البدائل دالة انفصالية فيمكن لها أن تحوز كافة احتمالات النفى , بمعنى أنه لابد أن يكون أحد مستوياتها الثلاثة منفيًّا على الاقل.

ومن خلال تطبيق مثل هذه المبادىء , يمكن التوصل الى الصور التكافؤية الآتية , وكلها بمثابة تعريفات للدالة التكافؤية عن طريف الانفصال:

- ق ⇔ ك ≡ (~ ق . ~ك) V ~(~ ق V ~ ك)
- ≡ (~ ق .~ ك) V ~(ق ← ~ك)
- ≡ (~ ق . ~ ك) V (ك . ق)
- ≡ (~ ق . ~ ك) V (ق . ك)[30]
- ≡ (~ ق . ~ ك) V (~ ك V ~ ق)
- ≡ (~ ق . ~ ك) V ~ (ك ← ~ ق)

- ≡ (~ق V ك) V ~(~ق V ~ك)
- ≡ (~ق V ك) V ~(ق → ~ك)
- ≡ (~ق V ك) V (ك . ق)
- ≡ (~ق V ك) V ~(~ك V ~ق)
- ≡ (~ق V ك) V ~(ك → ~ق)
- ≡ ~(~ق V ~ك) V (~ك . ~ق)
- ≡ ~(~ق V ~ك) V ~(~ك → ق)
- ≡ ~(~ق V ~ك) V ~(ك V ق)
- ≡ ~(ق → ~ك) V (~ك . ~ق)
- ≡ ~(ق → ~ك) V ~(ك V ق)
- ≡ ~(ق → ~ك) V ~(~ك → ق)
- ≡ (ك . ق) V (~ك . ~ق)
- ≡ (ك . ق) V ~(ك V ق)
- ≡ (ك . ق) V ~(~ك → ق)
- ≡ (~ك . ~ق) V ~(~ك V ~ق)
- ≡ (~ك . ~ق) V ~(ك → ~ق)
- ≡ ~(ك V ق) V ~(~ك V ~ق)
- ≡ ~(ك V ق) V ~(ك → ~ق)
- ≡ ~(~ك V ~ق) V ~(~ك → ق)
- ≡ ~(~ك V ~ق) V ~(ك → ~ق)

ولنا هنا ملاحظة على هذه الصورة التكافؤية , بين الدالة التكافؤية والدالة الانفصالية المركبة والتى يمكن صياغتها فى الآتى:

- أن الدالة العطفية أخذت دور الدالة اللزومية فى التركيب العطفى، وان الدالة اللزومية اخذت دور الدالة العطفية فى ذات التركيب

(٣) التكافؤ والدالة اللزومية المركبة:

وهو يعرف _أيضًا_ بتعريف التكافؤ عن طريق اللزوم ، ويمكننا أن نقول إن المبادىء التى تحكم مثل هذا التعريف تكمن فى:

- **إذا كان المقدم أو التالى فى التركيب اللزومى دالة عطفية , أو دالة انفصالية فلابد أن تكون إما كلها منفية وإما كلها مثبتة.**
- **إذا كان المقدم أو التالى فى المركب اللزومى عبارة عن دالة لزومية, فإما أن يكون المقدم فيها فقط ،(أو الدالة ككل والتالى) منفيًّا.**

وبعد تطبيق مثل هذه المبادىء يمكن التوصل إلى الصور الآتية:

- ق ⟺ ك ≡ ~(~ق . ~ ك) ← (ق . ك)
- ≡ ~(~ ق .~ ك) ← ~ (~ ق V ~ ك)
- ≡ ~ (~ ق . ~ ك) ← ~ (ق ← ~ ك)
- ≡ ~ (~ ق .~ ك) ← (ك . ق)
- ≡ ~ (~ ق . ~ ك) ← ~ (~ ك V ~ ق)
- ≡ ~ (~ ق .~ ك) ← ~ (ك ← ~ ق)
- ≡ (ق V ك) ← (ق . ك)
- ≡ (ق V ك) ← ~ (~ ق V ~ ك)
- ≡ (ق V ك) ← ~ (ق ← ~ ك)
- ≡ (ق V ك) ← (ك . ق)
- ≡ (ق V ك) ← ~ (~ ك V ~ ق)
- ≡ (ق V ك) ← ~ (ك ← ~ ق)
- ≡(~ ق ← ك) ← ~ (ق ← ~ ك)
- ≡ (~ ق ← ك) ← (ك . ق)
- ≡(~ ق ← ك) ← ~ (~ ك V ~ ق)
- ≡ (~ ق ← ك) ← ~ (ك ← ~ ق)
- ≡ ~ (~ ك . ~ ق) ← ~ (~ ك V ~ ق)
- ≡ ~ (~ ك . ~ ق) ← ~ (ك ← ~ ق)
- ≡ ~ (~ ك . ~ ق) ← (ك . ق)
- ≡ ~ (~ ك . ~ ق) ← ~ (~ ق V ~ ك)
- ≡ ~ (~ ك . ~ ق) ← (ق . ك)
- ≡ (~ ق ← ك) ← ~ (~ ق V ~ ك)

- ≡ (~ ق ← ك) ← (ق . ك)
- ≡ (~ ق ←ك) ← ~ (ق ←~ ك)
- ≡ (~ ق ← ك) ← (ك . ق)
- ≡ (~ ق ← ك) ← ~ (~ ك V ~ ق)
- ≡ (~ ق ←ك) ← ~ (ك← ~ ق)
- ≡ (~ ك← ق) ← (ق . ك)
- ≡ (~ ك← ق) ← ~ (~ ق V ~ ك)
- ≡ (~ ك← ق) ← ~ (ق ←~ ك)
- ≡ (~ ك← ق) ← (ك . ق)
- ≡ (~ ك← ق) ← ~ (~ ك V ~ ق)
- ≡ (~ ك← ق) ← ~ (ك ← ~ ق)
- ≡ (ك V ق) ← (ق . ك)
- ≡ (ك V ق) ← ~ (~ ق حد ~ ك)
- ≡ (ك V ق) ← ~ (ق ←~ ك)
- ≡ (ك V ق) ← (ك . ق)
- ≡ (ك V ق) ← ~ (ك ← ~ ق)
- ≡ (ك V ق) ← ~ (~ ك V ~ ق)

ولنا هنا أيضًا ملاحظة يمكن صياغتها فى الآتى :

- أنه إذا كان اللزوم هو الدالة المركبة , التى يمكن أن تتكافأ مع الدالة التكافؤية فيكفينا هنا أن نعرف ولو صورة واحدة على الأقل , من صور تكافؤها والدالة المتكافئة , ثم نستنتج بناءً على قواعد التكافؤ سالفة الذكر , كافة الصور الأخرى وفقًا للتعريفات المتبادلة بين الدوال.

فلو كانت لدينا مثلا دالة لزومية مركبة من دالة عطفية وأخرى انفصالية, وهى تكافىء بالفعل الدالة المتكافئة , فيمكن أن نضع فى الطرف الأول من هذه الدالة المركبة- وهى بمثابة المقدم- كافة الدوال التى يمكن تعريفها فى حدود العطف ، ويمكننا كذلك أن نطبق الفكرة نفسها على التالي

أو الدالة الانفصالية , بأن نضع كافة الدوال التي يمكن أن تعرف في حدودها.

وبشكل عام فيما يخص هذه التكافؤات يمكن القول أنه يكفينا أن يكون لدينا صور قليلة جدا لدالة مركبة ومن خلالها يمكن التوصل إلى كافة الدوال المتكافئة الأخرى بشتى صورها من خلال تطبيق قواعد التكافؤات سالفة الذكر، وإلى قريب من ذلك اشار الدكتور مهران حينما ذهب الى انه يمكننا أن نصل من التكافؤ

~ (ق ⇔ ك) ≡ ~ [(ق . ك) v (~ ق .~ ك)] إلى عدة دوال أخرى مركبة مكافئة لها وبالتالى يكون كل منها متكافئة للأخرى والتى منها:

~ (ق ⇔ ك) ≡ ~ (ق . ك) . ~ (~ ق . ~ ك)

وهنا تم تعريف الدالة الانفصالية ككل فى حدود الدالة العطفية، ومنها أيضًا

~ (ق ⇔ ك) ≡ (~ ق v ~ ك) . (ق v ك)

وهنا تم تعريف حجتى الدالة العطفية المركبة فى حدود الانفصال.ومنها أيضًا

~ (ق ⇔ ك) ≡ (ق ← ~ ك) . (~ ق ← ك)

وهنا تم تعريف الحجتين فى حدود الدالة اللزومية.[٣١]

- الخاتمة

للتثبت من صحة الاستدلالات ومكوناتها، والتكافؤات المنطقية عدة طرق من بينها قوائم الصدق بأشكالها المختلفة، ولعل هذه القواعد التى تم استنتاجها بناء على القراءة التحليلية للعلاقات الكائنة بين دوال الصدق تمثل طريقة يمكن أن تضاف إلى طرق التحقق الأخرى ، وعليه يمكن الاعتماد عليها ولو بشكل جزئى فى التحقق من صحة التكافؤات المنطقية ومكونات الاستدلالات المختلفة بدلاً من استخدام قوائم الصدق.

الهوامش:

1 – انظر في ذلك: برتراند رسل: مقدمة للفلسفة الرياضية. ترجمة:محمد مرسى أحمد. مراجعة :أحمد فؤاد الأهوانى.مؤسسة سجل العرب. القاهرة. ١٩٦٢م .ص [٢١٦].

2 – حيث إن هناك من يفرق بين التكافؤ والتعريف فكل تعريف تكافؤ بمعنى أن التعريفات إنما تقرر أيضا تكافؤات؛ لان التعريف التحليلي يعنى أن للمعرف وتعريفه نفس المعنى فإذا كان المعرف صادقاً كان تعريفه صادقا أيضا وإذا كان كاذبًا كان تعريفه كاذبًا: اى أن المعرف وتعريفه يشتركان فى قيمة الصدق وهذا هو أساس التكافؤ وعليه يمكن تبديل الرمز (=) بالرمز (≡).فى حين أنه ليس كل تكافؤ تعريف أو بمعنى أكثر دقة تعريف سليم.

3 – محمد مهران رشوان: مقدمة فى المنطق الرمزى. دار الثقافة للنشر والتوزيع. القاهرة. [١٩٩٩]م. ص [٩٣].

4 – - Strawson, P., F.,: Introduction to logical theory P 73

وانظر أيضًا : - Whitehead. A. N, and Russell. B: Principia Mathematica, Cambridge University press, New York, 1962., P.115

5 – انظرفى ذلك: -P.M ., p . 7

– الفرد تارسكى: مقدمة للمنطق ولمنهج البحث فى العلوم الاستدلالية . ترجمة: عزمى اسلام. مراجعة: فؤاد زكريا. الهيئة المصرية العامة للتأليف والنشر. القاهرة. ١٩٧٠م.ص ٦٨

6 – بيسون وأوكونر. مقدمة فى المنطق الرمزى . ترجمة عبد الفتاح الديدى .الهيئة المصرية العامة للكتاب. القاهرة. ١٩٨٧م

7 – يمكن التوصل إلى المزيد من هذه الصور التكافؤية من خلال إنشاء قائمة صدق مطولة ومجمعة, لكافة الدوال البسيطة بكل صورها , ثم تحديد القالب الرقمى الخاص بكل واحدة منها , واستخلاص القوالب الرقمية المتماثلة , والتى تمثل تكافؤًا بين دوالها. انظر فى ذلك :

- Barker,S,F: The Element of logic, Mc GRAW- HILL Book Cmpany, New York. 1989. pp.89 – 90

8 – محمد السرياقوسى:التعريف بالمنطق الرياضى. دارالثقافة. الأسكندرية. ١٩٨٧م. ص [٥٤٨:٥٤٩].

9 – ماهر عبدالقادر : فلسفة العلوم.ج٣ "المنطق الرياضى". دار النهضة العربية . بيروت. ١٩٨٥م.

10 – وهذه الصيغة هى تلك الصورة التى أشير إليها فى البرنكبيا , كتوضيح لمفهوم التكافؤ , حيث جاء فى البرنكبيا : فى أية قضيتين عندما تكون كل منهما متضمنة فى الأخرى نقول إنهما متكافئتان. انظر فى ذلك: P.M ., p. 115

11 – -Kelley.D. : The Art of Reasoning, w.w.Norton & Company, New York, 1988. P. 296

12 – والدراسة هنا سوف تركز على الدوال البسيطة ذات المتغيرين ، حيث إن ثمة دوالاً بسيطةً تتضمن أكثر من متغيرين.

13 – يمكن أن تسمى أيضًا بدالة الوصل , وذلك بناء على الثابت الذى يربط بين مكوناتها. والدراسة هنا تستخدم الرمز(.) للتعبير عن ثابت العطف أو الوصل , غير أن هناك العديد من الصور الرمزية الأخرى التى يمكن التعبير من خلالها عن هذا الثابت والتى منها:(&) ,(^) ،(+)

14 – تسمى أيضًا بدالة البدائل أو الدالة الشرطية المنفصلة , ويرمز للثابت الذى يربط بين بدائلها بالرمز(v) غير أن هناك العديد من الصور الرمزية الأخرى التى يعبر من خلالها عن هذا الانفصال.

15 – هى تمثل الصورة الثانية من الدالة الشرطية المنفصلة ، حيث إن الانفصال إما أن يكون حقيقيًا (قويًّا) وإما أن يكون غير حقيقى أو (ضعيف).

16 – يمكن أن تسمى أيضًا الدالة الشرطية المتصلة , أو الدالة الفرضية والثابت الذى يربط مقدمها بتاليها يأخذ الشكل(⇐،→ ، |) .

17 – ويمكن أن تسمى أيضًا دالة اللزوم المتبادل, لذلك هناك من يرمز الى هذه الدالة بالرمز.⇔

18 – هذه المعايير لا تخفى بطبيعة الحال على دارسى المنطق والمهتمين به, والتى يمكن أن نوجزها فى الآتى:

- الدالة العطفية تصدق فقط فى حالة صدق جميع مكوناتها , وغير ذلك فهى تكذب.
- الدالة الانفصالية بالمعنى الضعيف تكذب فى حالة واحدة, وهى كذب جميع بدائلها , وغير ذلك فهى صادقة.
- الدالة اللزومية تكذب فى حالة واحدة فقط , وهى عندما يكون مقدمها صادقًا, وتاليها كاذبًا, وغير ذلك فالدالة صادقة.
- الدالة التكافؤية تكون صادقة عندما تتماثل حالة صدق مكوناتها سواء بالصدق أم الكذب.
- يلاحظ أن الدالة الانفصالية بالمعنى القوى على النقيض من التكافؤية فما تصدق فيه التكافؤية تكون هى فيه كاذبة والعكس.

للمزيد من المعلومات حول هذا الموضوع انظر: **P.M. p.115**

19 – بيسون وأوكونر. مقدمة فى المنطق الرمزى . المرجع السابق. ص [٦٣].

20 – يمكن تطوير هذه السلسلة من خلال تطوير قائمة الصدق الخاصة بالدوال , من خلال معرفة قوالبها الرقمية , بعد إجراء عملية تبادل لمواضع مكوناتها , فمثلا نحدد القالب الرقمى الخاص بالدالة ك . ق , وهى صورة أخرى للدالة ق . ك بعد تبادل مواضع مكوناتها.

21 –-انظر فى ذلك : **– P.M. pp. 116 – 120**

- Hilbert,D. and A Ckermann,w: Principles of Mathematical logic., Chelsea Pub., New York , 1950.P.8- 12

22 – يسمى أحيانا بالانفصال الحقيقى والانفصال غير الحقيقى , والأخير هو المستعمل فى المنطق بشكل كبير , والذى يمكن الجمع فيه بين البدائل مع احتفاظ القضية الانفصالية بحالة الصدق ، والتى من أمثلتها أحمد إما طالب وإما موظف ، وفى هذه الحالة يمكن الجمع بين البديلين , بحيث يمكن أن يكون الشخص الواحد موظفًا , ويستكمل دراساته كطالب فى الوقت نفسه.انظر فى ذلك على سبيل المثال: الفرد تارسكى: مقدمة للمنطق ولمنهج البحث فى العلوم الاستدلالية .المرجع السابق. ص ص ٥٦ ، ٥٧.

23 – حيث إننا فى الدالة البسيطة المركبة من متغيرين نتعامل مع ثلاثة مستويات : الدالة ككل تمثل المستوى الأول ، المتغير الأول أيًّا كان مسماه حسب الدالة التى يرد بها يسمى بالمستوى الثانى ، أما المستوى الثالث فيتمثل فى المكون الثانى للدالة.

24 – حيث إن الدالة فى حالة عدم اختلاف حالات صدق مكوناتها, فالأمور من الوضوح بمكان, ويكون التكافؤ من السهولة بمكان فمثلا ق . ك ≡ ك . ق

وكذلك ق v ك ≡ ك v ق وهكذا.

25 – وهذه الصورة وما على شاكلتها من صور تكافؤية أخرى مشار اليها أيضًا فى البرنكبيا ، وللاطلاع على ذلك انظر: P.M ., p. 116 -

26 – محمد مهران: مقدمة فى المنطق الرمزى. المرجع السابق. ص ١٠٠

27 – انظر فى ذلك:

محمد مهران: مقدمة فى المنطق الرمزى، المرجع السابق، ص ٩٥

28 – وتمثل هذه الصورة إحدى الصور البسيطة التى يمكن من خلالها تعريف التكافؤ فالدالتان أو القضيتان متكافئتين اذا كانت كل منهما تلزم عن الأخرى ، وهو الأمر الذى يتجسد من خلال هذه الصورة.

29 – ماهر عبد القادر. المنطق الرياضى. المرجع السابق . ص [٣٠].

وانظر أيضا:محمد مهران: مقدمة فى المنطق الرمزى. المرجع السابق. ص ٩٩.

30 – وهى من ضمن الصور المتداولة فى غالبية كتب المنطق الرمزى بوصفها تعريفًا للتكافؤ وذلك بناءً على حقيقة أن التكافؤ يكون صادقًا عندما يكون كلا مكوناته أما صادقين معًا وأما كاذبين معًا.

انظر فى ذلك مثلاً: - Kelley, D: OP.Cit. P. 298

31 – محمد مهران: مقدمة فى المنطق الرمزى. المرجع السابق. ص ٩٩

- المراجع-

- أولاً: مراجع باللغة العربية

١- الفرد تارسكى: مقدمة للمنطق ولمنهج البحث فى العلـوم الاستدلالية . ترجمة: عزمى اسلام. مراجعة: فؤاد زكريا. الهيئة المصرية العامة للتأليف والنشر. القاهرة. ١٩٧٠م

١- برتراند رسل: أصول الرياضيات . ج ٤. ترجمة: محمد مرسى أحمد. مراجعة: أحمد فؤاد الأهوانى. دار المعارف . القاهرة

١- ــــــــــ: مقدمة للفلسفة الرياضية. ترجمة:محمد مرسى أحمد. مراجعة :أحمد فؤاد الأهوانى.مؤسسة سجل العرب. القاهرة. ١٩٦٢م .

١- بيسون وأوكونر. مقدمة فى المنطق الرمزى . ترجمة عبد الفتاح الديدى .الهيئة المصرية العامة للكتاب. القاهرة. ١٩٨٧م

١- ماهر عبدالقادر : فلسفة العلوم.ج٣ "المنطق الرياضى". دار النهضة العربية . بيروت. ١٩٨٥م

١- محمد السرياقوسى: التعريف بالمنطق الرياضى. دارالثقافة. الأسكندرية. ١٩٨٧م.

١- محمد مهران رشوان: مقدمة فى المنطق الرمزى. دار الثقافة للنشر والتوزيع. القاهرة. [١٩٩٩]م.

- ثانياً: مراجع باللغة الأجنبية.

1- Barker,S,F: The Elements of logic, Mc GRAW-HILL Book Company, New York. 1989

2- Hilbert,D. and ACkermann,w: Principles of Mathematical logic., Chelsea Pub., New York , 1950.

3- Kelley.D. : The Art of Reasoning, w.w.Norton & Company, New York, 1988. P. 296

4- Strawson, P.F,: Introduction to Logical Theory, Meth& CO. LTD., London, 1967

5- Whitehead. A. N, and Russell. B: Principia Mathematica, Cambridge University Press, New York, 1962.